EIROPAS SOCIĀLAIS FONDS

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

EIROPAS SAVIENĪBA

Projekta
„Atomāro un nepārtrauktās vides tehnoloģisko fizikālo procesu modelēšana, matemātisko metožu pilnveide un kvalitatīvā izpēte”
Nr.2009/0223/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/008

Tehniskā atskaite aktivitātē

4.7. Pētījumi modernajā elementārajā matemātikā

Apstiprinu:
Projekta padomes priekšsēdētājs:

__________________Jānis Mencis

Apstiprinu:
LU Zinātņu prorektors:

______________Indriķis Muižnieks

Pētījuma apakšaktivitāte

4.7. Pētījumi modernajā elementārajā matemātik

Aktivitātes vadītājs: docente Dace Bonka

Apakšaktivitātes mērķis un plānotie uzdevumi

Lai nodrošinātu ilglaicīgu zinātnes attīstību, jārūpējas par atbilstošo kadru sagatavošanu Latvijā. Tā nevar tikt uzsākta tikai augstskolā. Tāpēc nozīmīgas ir aktivitātes, kas paplašina un padziļina Latvijas skolēnu zināšanas, prasmes un iemaņas matemātikā un sagatavo spējīgākos no viņiem iespējami agrai zinātniskās darbības uzsākšanai.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skolā (NMS) jau gandrīz 40 gadus tiek veikts pētniecisks darbs šajā virzienā un iegūto rezultātu iedzīvināšana. Šo pētījumu rezultātā izveidojusies jauna matemātikas apakšnozare: 1995.gadā Latvijā pirmo reizi pasaulē modernā elementārā matemātika (MEM) tika iekļauta oficiālajā zinātņu klasifikācijā.

NMS zinātnisko un pedagoģisko aktivitāšu ietvaros izveidota mācību programma, kas līdz šim aptvērusi ap 30 000 skolēnu. Tās darbības rezultātā 1) Latvijas augstskolās katru gadu iestājas liels skaits matemātiski izcili sagatavotu reflektantu; 2) uzsākot studijas, daudzi no viņiem ir sagatavoti, lai uzreiz iesaistītos zinātniskos pētījumos; 3) zinātniski pedagoģiskie kolektīvi regulāri saņem kvalitatīvu papildinājumu, kas veicina gan zinātnes attīstību, gan palielina zinātniskās produkcijas eksportspēju.

Projekta izpildes gaitā bija paredzēts: 1) turpināt iesāktos pētījumus modernajā elementārajā matemātikā; 2) pilnveidot un paplašināt pedagoģisko metožu kopumu, kas balstās uz minētajiem pētījumiem un orientēta uz skolēniem, skolotājiem un studentiem – topošajiem skolotājiem; 3) atspoguļot sasniegtos rezultātus starptautiski recenzējamos rakstos, referātos starptautiskās konferencēs un mācību līdzekļos.

Pētījumi un rezultāti matemātikas padziļinātas izglītības jomā

Darba grupas galvenais darbs tika vērsts uz jauniešu intereses veicināšanu par eksaktajām zinātnēm, it īpaši matemātiku, matemātisko spēju attīstīšanu un skolēnu pētniecisko prasmju un iemaņu attīstīšanu.

Diemžēl skolas mācību procesā arvien lielāka loma tiek pievērsta tikai konkrētu zināšanu praktiskai lietošanai, novārtā atstājot pierādījumu nozīmi. Lai skolēnos attīstītu spriešanas prasmes un iemaņas precīzi pamatot savu domu, kā arī pamatojumu izklāstīt rakstiskā formā, visu zemāk aplūkoto sacensību uzdevumiem ir jāizsniedz pilni risinājumi ar izvērstiem paskaidrojumiem (izņēmums ir 4. klašu konkursa „*Tik vai... Cik?*” pirmās kārtas, kurās kā iesildīšanās tiek piedāvāti arī testa jautājumi ar dotiem atbilžu variantiem, no kuriem jāizvēlas viena pareizā atbilde). Tāpēc parasti vienā komplektā tiek piedāvāts neliels skaits uzdevumu, kuru atrisināšanai atvēlēts relatīvi ilgs laiks (matemātikas olimpiādēs tiek piedāvāti 5 uzdevumi, kuru risināšanai atvēlētas 5 stundas). Regulāra prasība pēc savu spriedumu pamatojuma attīsta arī iekšēju nepieciešamību pēc jebkuras savas domas un izteikuma pamatojuma, kas ir būtiski ne tikai pētniekiem, bet jebkuram vispusīgi attīstītam pilsonim.

Būtiska loma spriešanas un pamatošanas prasmju (tostarp arī pētniecisko iemaņu) attīstīšanā ir vispārīgajām kombinatoriskajām metodēm, kas balstās uz vispāratzītām, cilvēces daudzu gadu simtu laikā gūtām atziņām, tāpēc to būtība ir viegli uztverama visu vecumu skolēniem. Šīs metodes nav tikai kādas vienas specifiskas problēmas vai problēmu grupas risināšanas paņēmieni, bet ir plaši pielietojamas daudzās dzīves jomās, tostarp arī augstākajā matemātikā.

1) Invariantu metodes būtība ir meklēt kādā procesā vai kombinācijā nemainīgos lielumus vai īpašības. Lielākoties invariantu metode tiek lietota neiespējamības pierādījumos.

2) Vidējās vērtības metodes būtību var izteikt vārdos: „*lai paveiktu lielas lietas vismaz vienā virzienā jākoncentrē pietiekami lieli līdzekļi*”. Bieži tiek lietots vidējās vērtības metodes speciālgadījums *Dirihlē princips*: *ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vismaz divi truši*. Vidējās vērtības metode lietojama, lai pamatotu kāda noteikt veida objektu eksistenci.

3) Ekstremālā elementa metodes lietojumos tiek pētīts kopas kaut kādā nozīmē ekstremālais elements un no tā īpašībām tiek izdarīti secinājumi par visas kopas īpašībām.

4) Matemātiskās indukcijas metode ir plaši lietots matemātisko pierādījumu paņēmiens, kurā vispārīgie spriedumi tiek izdarīti, balstoties uz konkrētiem spriedumiem.

5) Interpretāciju metodes ir tāds uzdevumu risināšanas vispārīgs paņēmiens, kad doto vienas apakšnozares uzdevumu „pārtulko” (interpretē) kādas citas apakšnozares „valodā”, atrisina iegūto uzdevumu un atrisinājumu „tulko” atpakaļ, iegūstot dotā uzdevuma risinājumu

jeb interpretāciju metodes lietošanas gaitā uzdevumu aizstāj ar tam izomorfu uzdevumu un risina to.

Projekta realizācijas gaitā tika pievērsta liela uzmanība šo metožu apguvei un lietošanai.

Pasākumi matemātikas padziļinātai apguvei un skolēnu intereses veicināšanai par matemātiku

Viens no motivācijas veicinātājiem ir sacensības gars, kas īpaši izteikts jaunākā skolas vecuma jauniešiem un pusaudžiem. Tāpēc, kā rāda pieredze, veiksmīga padziļinātas mācīšanās forma ir sacensības. Matemātikā tie ir dažāda veida konkursi un mācību olimpiādes. Lai sacensībās sasniegtu labus rezultātus, nepieciešams regulārs treniņš vai nu patstāvīgi, vai skolotāja vadībā matemātikas pulciņos vai fakultatīvajās nodarbībās. Jau tradicionāli Latvijā tiek rīkotas vairākas matemātiskās sacensības dažādu vecumu skolēniem. Pārskata periodā tika uzturētas jau aizsāktās tradīcijas, pilnveidojot konkursu norises kārtību un saturu, veidojot uzdevumus ar mūsdienīgāku saturu. Tāpat, ņemot vērā reducētās skolas matemātikas standarta prasības, uzdevumi tiek veidoti tā, lai attiecīgajai klasei paredzēto uzdevumu saturs nesaturētu specifiskos matemātikas faktus, kas attiecīgajā klasē netiek mācīts, uzsvaru liekot uz radošu un netradicionālu spriešanas paņēmienu pielietošanu.

1) Neklātienes konkursi pamatskolēniem

1.1) „*Jauno matemātiķu konkurss*" ir matemātikas uzdevumu risināšanas konkurss 4. – 7. klašu skolēniem. Mācību gada laikā notiek piecas kārtas, katrā kārtā skolēniem risināšanai tiek piedāvāti 5 uzdevumi. Pārskata periodā tika sastādīti 15 uzdevumu komplekti, kopā 75 uzdevumi, izstrādāti to atrisinājumi, kā arī veikta skolēnu rezultātu analīze. Mācību gada laikā konkursā iesaistās ~250 dalībnieki.

1.2) „*Profesora Cipariņa klubs*" ir matemātikas uzdevumu risināšanas konkurss 5. – 9. klašu skolēniem ar 39 gadu senām tradīcijām un ir iemantojis gan skolēnu, gan viņu skolotāju uzticību. Arī šī konkursa ietvaros jau jaunākā skolas vecuma skolēniem tiek piedāvāti netradicionālus, uz pētniecisku darbību rosinoši uzdevumi. Pārskata periodā tika izstrādāti uzdevumu komplekti 3 mācību gadiem, t.i., 18 uzdevumu komplekti, kas kopā satur 180 uzdevumus, izstrādāti uzdevumu atrisinājumi un analizēti skolēnu rezultāti. Mācību gada laikā konkursā iesaistās ~200 dalībnieki.

2) Konkurss – olimpiāde 4. klašu skolēniem „*Tik vai... Cik?*” Latvijā veiksmīgi darbojas jau desmito gadu, un tā popularitāte ar katru gadu arvien aug. Pēdējā gadā konkursā iesaistījās ~3500 skolēni no ~170 Latvijas skolām. Konkursa mērķis ir sākumskolas skolēniem piedāvāt netradicionālus uzdevumus, kas attīsta loģisko domāšanu un spriešanas prasmes. Pārskata periodā tika izstrādā tika izstrādāti 12 uzdevumu komplekti, pavisam 108 uzdevumi, to atrisinājumi un metodiski materiāli par darbu vērtēšanu, jo konkursa darbi tiek laboti skolās uz vietas. Tika apstrādāti un analizēti skolēnu rezultāti.

3) Tradīcijām bagātās sacensības Latvijā un pasaulē ir matemātikas olimpiādes. Matemātikas olimpiādes 5.- 12. klašu skolēniem ir populārākās mācību olimpiādes Latvijā. Latvijā tiek rīkota valsts olimpiāde matemātikā trīs posmos un atklātā matemātikas olimpiāde.

3.1.) Valsts olimpiādes 2. (novadu) un 3. (valsts) posma norisi reglamentē IZM VISC izstrādātais rīkojums „Par mācību priekšmetu olimpiāžu organizēšanu un norisi”, taču 1. (skolas) posms jeb sagatavošanās olimpiāde jau daudzus gadus ir LU A.Liepas NMS iniciatīva. Pārskata periodā sagatavošanās olimpiādes uzdevumu komplekti un metodiskie materiāli (pavisam 120 uzdevumi) tika izstrādāti projekta ietvaros.

3.2) Atklātajā matemātikas olimpiādē drīkst piedalīties jebkurš 5.-12. klašu skolēns. Pēdējos gados tajā katru gadu piedalās ~3000 dalībnieku. Atklātās matemātikas olimpiādes rīkošanas jau 40 gadus ir bijusi LU A.Liepas NMS iniciatīva, bet pārskata periodā uzdevumu komplektu un metodisko materiālu izstrāde, kā arī rezultātu apstrāde un analīze tika veikta projekta ietvaros. Pārskata periodā tika izstrādāti 120 uzdevumi, laboti skolēnu iesniegtie darbi, kā arī apstrādāti un analizēti rezultāti. Rezultātu analīze uzrāda, kādu tēmu uzdevumi sagādā skolēniem lielākas grūtības, tāpēc to apguvei tiek pievērsta lielāka uzmanība, iekļaujot tās NNV materiālos, kā arī izstrādājot plašāku teorijas materiālu uzdevumu krājumu ievaddaļā.

3.3) Lai novērtētu Latvijas skolēnu sagatavotības līmeni uz starptautiskā fona, Latvijas skolēnu komandas piedalās Starptautiskajā matemātikas olimpiādē (IMO), Starptautiskajā skolēnu komandu matemātikas olimpiādē „Baltijas Ceļš” un 2012. gadā pirmo reizi Latvijas meiteņu izlase piedalījās Eiropas meiteņu matemātika olimpiādē (EGMO). Lai atlasītu starptautisko sacensību dalībniekus, tiek rīkotas vairākas papildsacensības. Pārskata periodā notika trīs atlases sacensības dalībai olimpiādē „Baltijas ceļš”, to realizācijai tika izstrādāti 60 uzdevumi, sešas papildsacensības par iespēju piedalīties Starptautiskajā matemātikas olimpiādē, to vajadzībām tika izstrādāti 30 uzdevumi, kā arī atlases sacensības dalībai Eiropas meiteņu matemātikas olimpiādē, tām tika izstrādāti 5 uzdevumi.

To, ka Latvijas matemātikas padziļinātās izglītības sistēma ir labā līmenī, apliecina mūsu skolēni sasniegumi starptautiskajās olimpiādēs: pārskata periodā starptautiskajā matemātikas olimpiādē pavisam tika izcīnītas 1 sudraba medaļa, 3 bronzas medaļas un 8 atzinības, komandu olimpiādē „Baltijas Ceļš" Latvijas komanda ir izcīnījusi 4. vietu 2010. gadā un 2. vietu 2011. gadā, Eiropas meiteņu matemātikas olimpiādē ir izcīnīta viena bronzas medaļa.

Tā kā ne visās skolās ir pietiekami kvalificēti skolotāji, kas skolēnus var sagatavot dalībai matemātikas sacensībās, līdztekus sacensībām tiek piedāvāti arī izglītojošie pasākumi.

4) *Neklātienes nodarbības vidusskolēniem* (NNV) ir tālmācības kurss vidusskolēniem par atsevišķām matemātikas tēmām, kas skolā netiek pietiekami plaši aplūkotas. Pārskata periodā tika realizēti trīs mācību gadu cikli, kopā pa 12 nodarbībām divām vecuma grupām 9. -10. klašu skolēniem un 11.-12. klašu skolēniem. Tika izstrādāti un uzlaboti materiāli un uzdevumi par tēmām „*Invariantu metode*", „*Kārtošanas metodes*", „*Vektori*", „*Dirihlē princips*" un „*Matemātiskās indukcijas metode*", pavisam tika sastādīti 240 uzdevumi.

5) Pārskata periodā tika atjaunota Mazās matemātikas universitāte (MMU) vidusskolēniem. MMU pirmsākumi meklējami jau sešdesmito gadu sākumā, kad pirmās šāda veida nodarbības 1965. gadā organizēja doc. Oto Treilībs. Kopš tā laika ar nelieliem pārtraukumiem MMU nodarbības notiek katru mācību gadu vienu vai divas reizes mēnesī. Parasti katrā nodarbībā tiek organizētas 2 lekcijas, katra ilgst 90 minūtes. Gan kā klausītāji, gan kā lektori MMU piedalījušies daudzi vadošie Latvijas matemātiķi, Latvijas Universitātes mācībspēki, zinātnieki un studenti. MMU Lekciju tematika ir visdažādākā – tās ir matemātikas nozares un tēmas, kuras netiek plaši aplūkotas skolas kursā, t.sk. populārzinātniskas lekcijas par augstākās matemātikas tēmām, tās ir arī skolas kursa dažādu tēmu padziļināts un paplašināts apskats.

2011./12. mācību gadā pēc divu gadu pārtraukuma MMU atsāka savu darbību „ar jaunu elpu", par galveno mērķi izvirzot skolēnu intereses veicināšanu par matemātiku, uzsverot matemātikas daudzveidību un tās lietojumu iespējas dažādās zinātnes un dzīves jomās, līdz ar to mudinot jauniešus izvēlēties studijas LU FMF. Arī novecojusī pasniegšanas forma – lekcija tikai pie tāfeles ar krītu – neatbilst mūsdienu jaunatnes prasībām. Tāpēc obligāta prasība katrai lekcijai ir datorprezentācija, vēlama arī skolēnu patstāvīga praktiska darbošanās. Lai mudinātu jauniešus aktīvi sekot līdzi nodarbības tēmai, katru reizi neiztrūkstoša ir atgriezeniskā saite – nodarbības beigās neliels tests par dienas laikā aplūkotajām tēmām un mājas darbs, kas jāizpilda līdz nākamajai nodarbībai.

Aktīvākajiem un centīgākajiem nodarbību apmeklētājiem mācību gada beigās tiek piešķirts sertifikāts.

Lai arī nodarbības pamatā paredzētas 10. – 12. klašu skolēniem, tās apmeklē arī vairāki 8. – 9. klašu skolēni un matemātikas skolotāji, kas liecina par šāda veida nodarbību nepieciešamību u lietderību.

Informatīvā sistēma

Visa ar MMU un citām aplūkotajām aktivitātēm saistītā informācija atrodama LU A.Liepas NMS mājas lapā http://nms.lu.lv. Pārskata periodā darbs tika veltīts arī tās uzturēšanai un pilnveidošanai.

Lai varētu veikt kvantitatīvus pētījumus par darba grupas realizēto pasākumu ietekmi uz skolēnu sasniegumiem ilgtermiņā, pārskata periodā tika veikts darbs pie LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skolas skolēnu matemātisko sasniegumu datubāzes uzturēšanas un pilnveidošanas.

Mācību materiālu izstrāde

Nozīmīga loma jebkurā izglītības procesā ir dažādiem mācību un atbalsta materiāliem. LU A.Liepas NMS ik gadu izdot vairākus mācību palīglīdzekļus skolēniem un skolotājiem. Mācību palīglīdzekļos tiek iekļauti viena mācību gada matemātisko sacensību, t.sk. arī starptautisko sacensību, kurās piedalās Latvijas skolēni, uzdevumi, izvērsti to atrisinājumi. Mācību palīglīdzekļi ir paredzēti arī skolēnu individuālajam darbam, tāpēc atsevišķā nodaļā pirms pilna atrisinājuma izklāsta ir doti ieteikumi vai īsas norādes par risinājuma gaitu.

Kā nozīmīgs jaunievedums projekta pētījumu rezultātā izstrādājamos mācību palīglīdzekļos tiek iekļauts arī īss teorijas apkopojums.

Pārskata periodā tika veikts darbs pie sešu jaunu grāmatu izstrādes, kuru līdzautori ir darba grupas dalībnieki.

1. D. Bonka, S. Krauze, A. Šuste. Jauno matemātiķu konkurss 2000.-2005. gadā. Rīga: LU, 2011.

2. A. Andžāns, D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm 2009./2010. mācību gadā. Rīga: LU, 2011.

3. A. Andžāns, M. Avotiņa, L. Freija. Matemātikas sacensības 9. –12. klasēm 2009./2010. mācību gadā. Rīga: LU, 2011.

4. A. Andžāns, M. Avotiņa, I. Opmane, Z. Ozola, M. Stupāne. „Profesora Cipariņa kluba" uzdevumi un atrisinājumi 1986.-1989. gadā. Rīga: LU, 2011.

5. M. Avotiņa, L. Freija. Matemātikas sacensības 9. –12. klasēm 2010./2011. mācību gadā. Rīga: LU, 2012.

6. D. Bonka, Z. Kaibe, L. Zinberga. Matemātikas sacensības 4. –9. klasēm 2010./2011. mācību gadā. Rīga: LU, 2012.

Skolēnu zinātniski pētnieciskā darbība

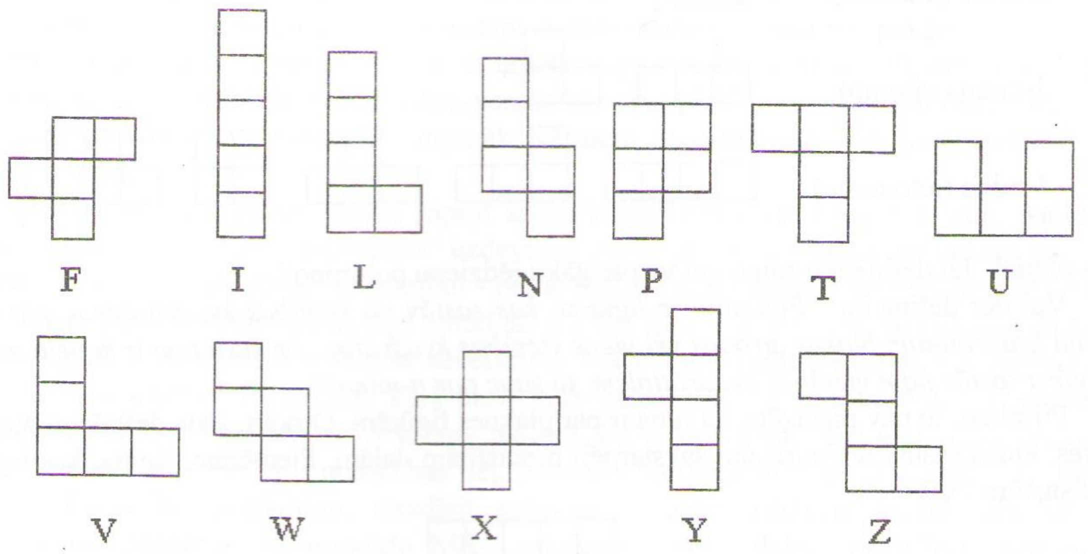
Liela nozīme skolēnu pētniecisko prasmju attīstībā ir skolēnu zinātniski pētnieciskā darba (ZPD) izstrāde vidusskolā. Projekta ietvaros tika aplūkotas arī atsevišķas problēmu grupas, pārsvarā no kombinatoriskās ģeometrijas jomas, kas veiksmīgi izmantojamas kā skolēnu zinātniski pētniecisko dabu temati. Par to ir ziņots arī VISC organizētajā seminārā „Skolēnu pētniecisko darbu izstrāde matemātikā".

Pētījumi kombinatoriskajā ģeometrijā

Kombinatoriskā ģeometrija pēta figūru savstarpējo novietojumu, kā arī figūras diskrētā (rūtiņu) plaknē. Plaša kombinatoriskās ģeometrijas problēmu grupa saistīta ar *polimino*. Par *polimino* sauc plaknes figūru, ko iegūst no vienības kvadrātiem, pievienojot tos vienu otram pa vesela garuma malām. Ja polimino sastāv tieši no n vienības kvadrātiem, to sauc par n-

mino. Plašāk pētītie un aplūkotie polimino ir pentamino, skat. 1. zīm. (ar tiem saistīti uzdevumi bieži sastopami arī matemātisko sacensību uzdevumu komplektos).

Daudzu ar polimino saistīto problēmu risināšana balstās uz pilnu gadījumu pārlasi, kas parasti tiek veikta ar datoru palīdzību. Tāpēc galvenā atslēga ceļā uz problēmas atrisinājumu ir efektīva algoritma un datorprogrammas izstrāde gadījumu pārlases veikšanai.



1. zīmējums.

Galvenais pētījumu objekts projekta realizācijas laikā bija tetradi.

Definīcija. Par *tetradu* sauc tādu plaknes figūru, kas sastāv no četriem vienādiem daudzstūriem, kuriem katram ar katru ir kopēja robeža ar pozitīvu garumu.

Vēsturisks ieskats. Avotos tetradi minēti maz. Jēdziens „tetrads" pirmo reizi visticamāk parādījies 1985. gadā žurnālā „*Journal of Recreational Mathematics*". M. Gardnera grāmatā "*Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*" (1989) tetradiem veltīta neliela apakšnodaļa. Šajā grāmatā sniegti vairāki interesanti tetradi no dažādām poliformām, tostarp tetradi bez tukšumiem. 2008. gadā Wolfram Demonstrations Project ietvaros K. Šērers izveidojis spēli, kurā piedāvāts likt tetradus no dažādām poliformām. 2011. gadā lapā „Polyform Curiosities" Dž. Zihermans ievietojis pārskatu par tetradiem. Tetradi pētīti Jura Čerņenoka maģistra darbā "*Dažas neatrisinātas problēmas kombinatoriskajā ģeometrijā*", 2012. Tetradus pētījusi arī 10. klases skolniece Anastasija Jakovļeva un izstrādājusi ZPD ar nosaukumu "*Tetradu analīze*", 2012.

1. Problēma. Katram pentamino atrast mazāko tetradu, kas iekļauj šo pentamino kā vienīgo tukšumu.

Tika izstrādāts algoritms tetradu konstruēšanai no polimino.

Algoritma shēma. Sākumā uzdod polimino sarakstu un pēc tam attiecīgā ciklā katru analizē atsevišķi. Atrod visus novietojumus plaknē (tādu ir ne vairāk kā 8). Viens polimino eksemplārs tiek fiksēts. Atrod visus veidus, kā pievienot nākamo polimino, un no šiem visiem variantiem tiek izveidots masīvs. No šī masīva elementiem aplūko visas 3-apakškopas (kopa, kura satur trīs elementus). Ja 3-apakškopā katri divi polimino nepārklājas un atrodas blakus, tad šī apakškopa līdz ar sākumā fiksēto polimino veido tetradu. Visu 3-apakškopu izpēte ir realizējama ar trīs apakšciklu palīdzību, taču, šajā solī ir ieviesta optimizācija. Piemēram, apskatot apakškopas $\{1, m, n\}$, $\{2, m, n\}$, ..., $\{m-1, m, n\}$, kur $m < n$, daudzas reizes lieki tiek pārrēķināts, vai m-tais un n-tais polimino nepārklājas un atrodas blakus. Izmantojot dinamiskās programmēšanas principu, šāda lieka rēķināšana ir novērsta. Principā šis solis ir reducēts uz visu tādu polimino pāru no masīva atrašanas, ka šie polimino atrodas blakus un nepārklājas.

Jāpiebilst, ka katra atsevišķā polimino analīzē tieši pēdējais solis aizņem visvairāk laika, tāpēc tieši šī soļa uzlabošana varētu dot laika ekonomiju.

Rezultāti. Izstrādātais algoritms tika realizēts datorprogrammā. Izmantojot programmu, tika atrasti visi tetradi, kurus var salikt no n-mino, ja $n \leq 16$. Rezultāti apkopoti 1. tabulā.

n	cik n-mino veido	tetradu skaits
8	8	14
9	42	83
10	187	341
11	739	1388
12	2871	5648
13	11300	22688
14	44440	90243
15	172984	352163
16	670107	1373595

1. tabula.

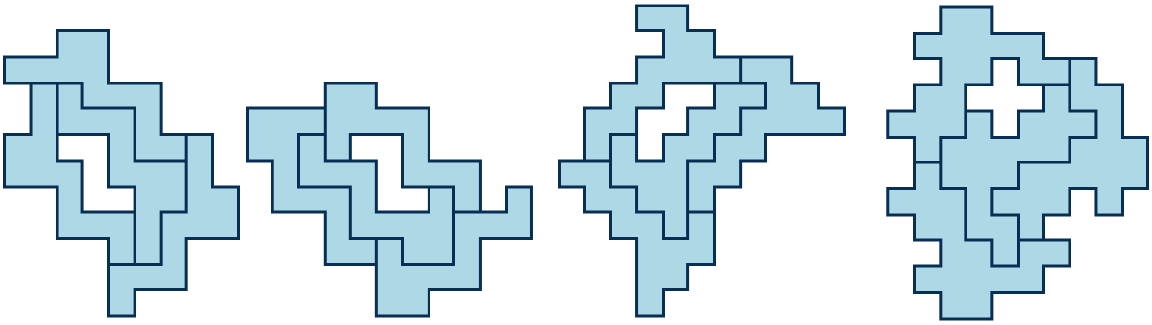
Ja tetrads no viena un tā paša polimino saliekams vairākos veidos, tad tas ieskaitīts tikai vienu reizi. Visu tetradu atrašanai no 16-mino patērētas aptuveni 115 stundas.

Analizējot iegūtos tetradu masīvus, tika atrisināta problēma par mazākajiem tetradiem, kas iekļauj katru pentamino kā vienīgo tukšumu. Rezultāti doti 2. tabulā.

F	I	L	N	P	T	U	V	W	X	Y	Z
15	10	12	15	10	15	15	15	13	17	15	12

2. tabula.

Daži atrisinājumi doti 2. zīmējumā.



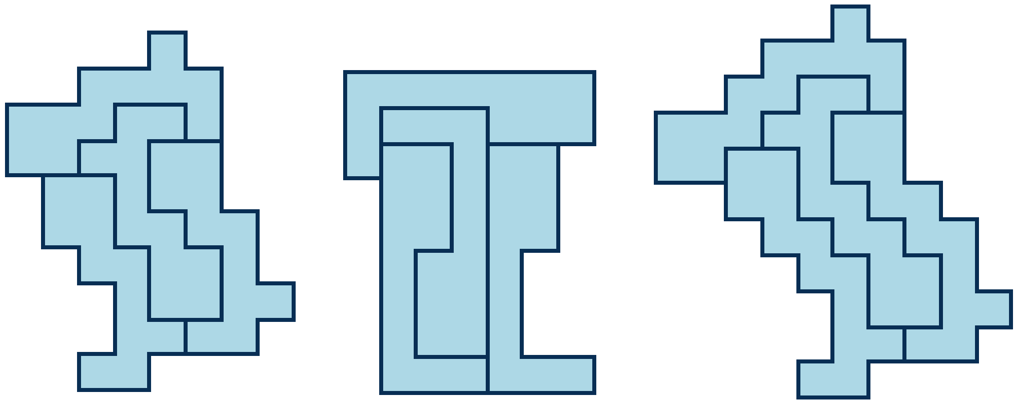
12-mino 13-mino 17-mino

2. zīmējums.

2. Problēma. Tika pētīta arī problēma par tetradu bez tukšumiem eksistenci. Pētījumu rezultātā tika formulēta un pierādīta sekojoša teorēma.

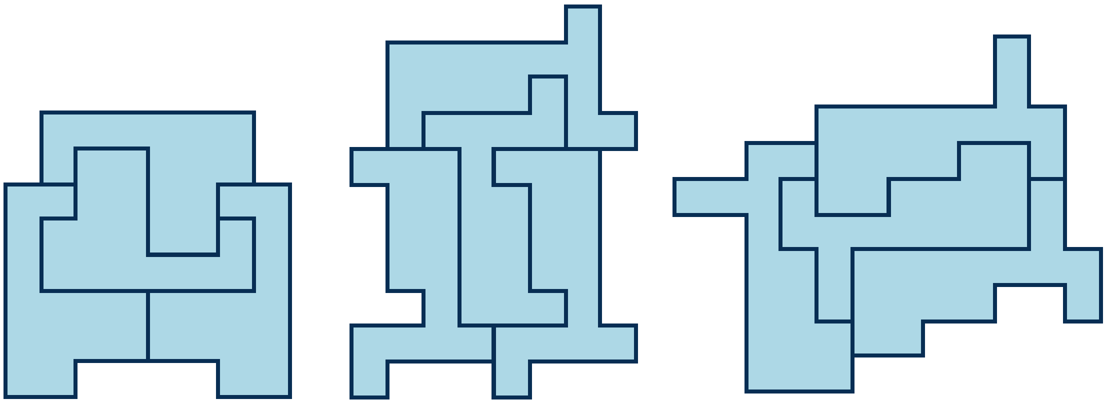
Teorēma. Katram n, $n \geq 11$, eksistē n-mino, kas veido tetradu bez tukšumiem.

Pierādījums. Tetradi bez tukšumiem priekš 11, 12, 13, 14, 15 un 16-mino eksistē un ir doti 3. un 4. zīmējumos.



11-mino 12-mino 13-mino

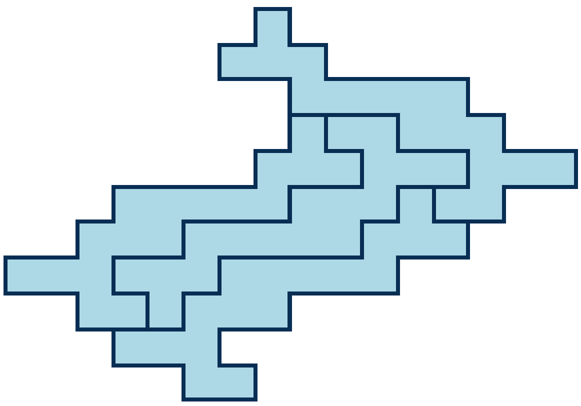
3. zīmējums.



14-mino 15-mino 16-mino

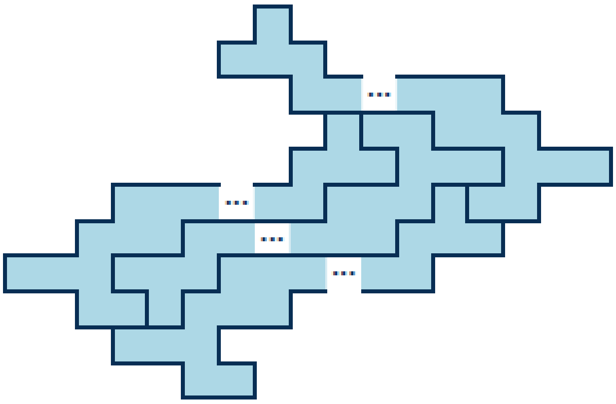
4. zīmējums.

Tagad aplūkosim šādu 17-mino bez tukšumiem, kā parādīts 5. zīmējumā.



5. zīmējums.

Uzmanīgāk aplūkojot tetradu, var pamanīt, ka to var "izstiept" horizontālā virzienā pēc patikas garu tā, kā parādīts 6. zīmējumā:



6. zīmējums

Tagad kļūst acīmredzami, ka priekš n = 18, 19,… *n*-mino, kas veido tetradus bez tukšumiem, arī eksistē, k.b.j.

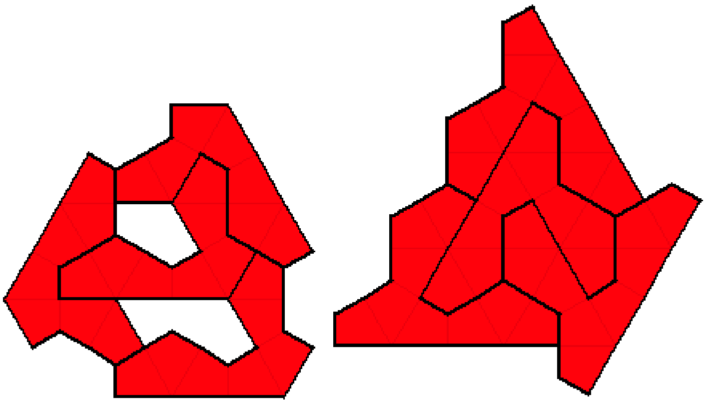
Bez polimino vēl tetradi pētīti arī no tādām poliformām kā *polimondiem, polikaitiem* un *politaniem*. Par *polimondu* sauc plaknes figūru, ko iegūst no vairākiem vienādiem regulāriem trijstūriem, pievienojot tos vienu otram pa vesela garuma malām. Par *polikaitu* sauc plaknes figūru, ko iegūs, pievienojot pa veselu malas garumu vienu otram vienādus četrstūrus, kam ir divi vienādu blakus malu pāri un leņķi ir 60°, 90°, 120° un 90°. Par *politanu* sauc plaknes figūru, ko iegūst no vairākiem vienādiem vienādsānu taisnleņķa trijstūriem, pievienojot tos vienu otram pa vesela garuma malām.

Šajā nolūkā datorprogramma tetradu meklēšanai tika pārveidota darbam ar iepriekš minētajām poliformām. Tā piemēram, tika atrasti visi tetradi, kurus var salikt no *n*-kaitiem, ja $n \leq 14$. Rezultāti apkopoti 3. tabulā.

n	cik *n*-kaiti veido	tetradu skaits
7	1	1
8	4	4
9	7	17
10	39	59
11	162	323
12	547	1020
13	1782	3216
14	6422	10970

3. tabula

3. tabulā redzams, ka mazākos tetradus veido 7-kaiti un šāds tetrads ir viens vienīgs. Bez tam tika noskaidrots, ka mazākais tetrads bez tukšumiem ir veidots no 9-kaita (sk. 7. zīmējumu). Tetradi no polikaitiem nav minēti nevienā no zināmajiem avotiem par tetradiem. Iegūtie rezultāti tika aizsūtīti Dž. Zihermanam. Tādā veidā daži ievērojamākie tetradi tika pievienoti lapā „*Polyform Curiosities*” sadaļā par tetradiem.



7. zīmējums

Vēl lapā „*Polyform Curiosities*” tika atrasta kļūda – tetradu saraksts no 10-*mondiem* nebija pilnīgs. Par kļūdu Dž. Zihermanam tika paziņots un pazaudētais tetrads tika pievienots.

3. Problēma. Vēl tika pētīta problēma par minimāliem I-trimino tīkliem. Problēmas nostādne ir šāda: kāds minimālais skaits I-trimino jāievieto kvadrātā $n \times n$, lai tajā nevarētu ievietot vēl vienu citu I-trimino. Problēma ir grūti algoritmizējama, tika izmēģinātas vairākas pieejas un izveidotas vairākas datorprogrammas, taču ievērojamus panākumus pagaidām gūt nav izdevies. Ir izanalizēti kvadrāti, kuru malas garums nepārsniedz 11. Algoritms ir laikā eksponenciāls. Piemēram, datorpierādījums, ka kvadrātam 11×11 nepietiek ar 23 I-trimino aizņem jau ~ 7 stundas. Šī kvadrāta minimālais tīkls sastāv no 24 I-trimino. Šo problēmu plānots vēl pētīt, tas varētu būt noderīgi vismaz divos aspektos: 1) par šo tēmu tiek izstrādāti skolēnu ZPD; 2) I-trimino minimālā skaita virkne pagaidām nav atrodama slavenajā virkņu enciklopēdijā *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* [http://oeis.org].

Zinātniskā sadarbība

Latvijas matemātikas padziļinātas izglītības un matemātisko sacensību sistēma ir augstu novērtēta pasaulē, par ko liecina fakts, ka 2010. gadā mums bija uzticēts rīkot divas augsta līmeņa nozares zinātniskās konferences/ kongresus. 2010. gada 25. – 30. jūlijā Rīgā notika Pasaules nacionālo matemātisko sacensību federācijas (WFNMC) 6. kongress (kas tiek rīkots reizi 4 gados). Tajā piedalījās ~60 dalībnieki no ~20 valstīm, t.sk., no Eiropas, Āzijas, Amerikas un Austrālijas.

No 1. -5. augustam notika 6. Starptautiskā konference „Radoša matemātikas mācīšana un apdāvinātu skolēnu izglītība”. Tajā piedalījās ~80 dalībnieki no ~25 valstīm, bija pārstāvēti visi kontinenti, izņemot Antarktīdu. Šīs konferences nodibināta starptautiska zinātniska biedrība „International Group for Mathematical Creativity and Giftedness” (MCG). Darba grupas dalībniece Dace Bonka tika ievēlēta šīs biedrības valdē.

Darba grupas dalībnieki bija gan abu šo pasākumu rīcības komitejas, gan programmu komitejas locekļi. Tika sastādīti, rediģēti un izdoti 5 zinātnisko darbu krājumi:

1. Abstracts of The 6th International Confernce on Creativity in Mathematics Education and Education of Gifted Students. Eds. M.Avotiņa, D.Bonka, H.Meissner, L.amāna, L.Sheffield, E.Velikova. University of Latvia, Latvia/ Angel Kanchev Oniversity of Ruse, Bulgaria, 2010. – 99 pp.

2. Proceedings of The 6th International Confernce on Creativity in Mathematics Education and Education of Gifted Students. Eds. M.Avotiņa, D.Bonka, H.Meissner, L.amāna, L.Sheffield, E.Velikova. University of Latvia, Latvia/ Angel Kanchev Oniversity of Ruse, Bulgaria, 2011. – 236 pp.

3. Abstracts of The 6th Congress of the World Federation of National Mathematics Competitions. Eds. M.Avotiņa, D.Bonka, M.Falk de Losada, L.Ramāna, A.Soifer. University of Latvia, Latvia, 2010. – 57 pp.

4. Proceedings of The 6th Congress of the World Federation of National Mathematics Competitions. Eds. M.Avotiņa, D.Bonka, M.Falk de Losada, A.Soifer. University of Latvia, Latvia, 2011. – 223 pp.

5. The Problem book of The 6th Congress of the World Federation of National Mathematics Competitions. Eds. M.Avotiņa, D.Bonka, M.Falk de Losada, A.Soifer. University of Latvia, Latvia, 2011. – 64 pp.

Publikācijas

1. M.Avotiņa. Inequalities in mathematical olympiads. In: Proceedings of The 6th International conference on creativity in mathematics education and the education of gifted students, University of Latvia, Latvia/ Angel Kanchev Oniversity of Ruse, Bulgaria, 2010. – pp. 7 – 12.

2. D. Bonka, Z. Kaibe. Mathematikwettbewerbe für die Schüler in Lettland. – In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, Band I, WTM, Münster, 2011. – S. 123 – 126.

Dalība konferencēs/ kongresos

1. M.Avotina „Inequalities in mathematical olympiads”. - 6th International conference on creativity in mathematics education and the education of gifted students, Riga, Latvia, August 1-5, 2010.

2. D. Bonka, Z. Kaibe. Mathematikwettbewerbe für die Schüler in Lettland. – 45. Jahrestagung für Didaktik der Mathamatik, Freiburg, Deutschland, 21. – 25. February, 2011.

3. D. Bonka. How to work with mathematically gifted students. - 12th International conference Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives, Šiauliai, May 5 – 6, 2011.

4. M.Avotiņa. Difference Equations in School Curriculum and Mathematical Contests. - 12th International conference Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives, Šiauliai, May 5 – 6, 2011.

5. D. Bonka. On Problem Set's composition for math olympiads. – 13th International conference Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives and 8th Nordic-Baltic conference AGROMETRICS, Tartu, 30 May-01 June, 2012.

6. D. Bonka Does Science Help in Advanced Math Education? – The 7th International conference on Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students, Korea Sciebce Academy of KAIST, July 15-18, 2012.

7. J.Čerņenoks. Polyominoes as a Rich Source for an Appropriate Research Topics for Gifted Students. - The 7th International conference on Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students, Korea Sciebce Academy of KAIST, July 15-18, 2012.

8. D. Bonka. Dalība Starptautiskajā matemātikas izglītības kongresa ICME 2012, Seulā, Korejā, 2012. gada 8. – 15. jūlijā. Dalība diskusiju grupā DG 2: Creativity in Mathematics Education.