

**Projekta**

**„Atomāro un nepārtrauktās vides tehnoloģisko fizikālo procesu modelēšana, matemātisko metožu pilnveide un kvalitatīvā izpēte”**

**Nr.2009/0223/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/008**

**Tehniskā atskaite aktivitātē**

**4.6. Pētījumi modernajā elementārajā matemātikā**

**Apstiprinu:**

**Projekta padomes priekšsēdētājs:**

\_\_\_\_\_ **Jānis Mencis**

**Apstiprinu:**

**LU Zinātņu prorektors:**

\_\_\_\_\_ **Indriķis Muižnieks**

## Pētījuma apakšaktivitāte

### 4.6.1. Daudzvērtīgu matemātisko struktūru un kriptogrāfisko metožu lietošana matemātiskajā modelēšanā

*Aktivitātes vadītājs: profesors Aleksandrs Šostaks*

## 1. Ievads

### 1.1. Nestriktas kopas, kā daudzvērtīgu matemātisku struktūru priekštecis: to vēsture un nozīme matemātikā un matemātikas lietojumos

Aprakstot reālo situāciju, ne vienmēr ir iespējams pateikt vai spriedums par to ir viennozīmīgi paties vai aplams. Parasti īstenība ir kaut kur pa vidu – spriedums ir daļēji paties. Acīmredzot tas nav jauns zinātnisks atklājums. Tāpat nav jauns atzinums, ka visu īstajā pasaulē nevar iedalīt labajā un sliktajā – baltajā un melnajā, bez tā ir vēl daudz dažādu ēnas pelēko toņu. „Matemātiski” to varam interpretēt šādi: objektam piemīt īpašība ar zināmu pakāpi. Līdzīga ideja sastopama jau Aristoteļa darbos. Tomēr tikai 19. gadsimta beigās mūsdienu zinātnieki sāka nopietni interesēties, kā matemātiski interpretēt, to, ka apgalvojums ir paties ar kaut kādu pakāpi vai objektam piemīt īpašība tikai daļēji.

Jāatzīmē, ka celmlauži šajā jomā bija zinātnieki ar plašām interesēm, kas pazīstami gan kā filozofi gan kā eksakto zinātņu pētnieki. Čārlzs Pairs (Charles Peirce 1839-1914) – ķīmiķis, filozofs un matemātiķis rakstīja: „Loģikas speciālisti pārāk nevērīgi izturas pret nenoteiktības problemātikas izpēti, nenojaušot cik nozīmīga loma tai ir matemātiskajā domā”. Bernhards Artūrs Viljams Rasels (Bernhard Arthur William Russell 1872-1970) – izcilais matemātiķis, loģikas speciālists un filozofs iztirzāja šīs problēmas savā darbā „Ievads matemātikas filozofijā”.

Iespējams, ka pirmais zinātnieks, kurš pētīja nenoteiktības problēmu no matemātiskās loģikas skatu punkta, bija Jans Lukasiēvičs (Jan Lukaszewicz 1878 -1956). Šodien ar Lukasiēviča loģiku mēs saprotam trīsvērtīgu loģiku, tas ir, apgalvojumam var būt viena no trīs patiesuma vērtībām. Neatkarīgi no Lukasiēviča, sākot no citām premisām, atšķirīgu daudzvērtīgas loģikas sistēmu piedāvāja Emīls Posts (Emil Post 1897-1954). Runājot par nestriktās matemātikas pirmsākumiem, noteikti jāpiemin matemātiķa Kārļa Mengera (Karl Menger 1902-1985) veikums. K. Mengers ierosināja attīstīt teoriju, kurā attiecība „elements pieder kopai” (un kas ir pamatu pamats visai Kantora kopu teorijai) tiek aizvietota ar varbūtību, ka elements pieder kopai.

Kā iepriekš ir minēts, 20. gadsimta otrajā pusē daudzu zinātnieku darbos tika izklāstītas dažādas idejas, kā radīt matemātisku koncepciju, ar kuras palīdzību varētu aprakstīt „izplūdušus” objektus un apgalvojumus, par kuriem nevar viennozīmīgi pateikt, ka tie ir patiesi vai aplami. Tomēr nestrikto kopu teorijas pamatlicēja, tostarp arī nestriktās kopas jēdziena ieviesēja, gods pienākas elektroinženierijas doktoram, Bērklījas Universitātes profesoram Lofti Zādē (L. A. Zadeh), kurš dzimis 1921. gadā Azerbaidžānas galvaspilsētā Baku. Draudzība ar izcilo loģikas speciālistu S. Klīni (S. Kleene 1904 – 1994) atstāja lielu ietekmi uz Zādē. Īpaši ietekme izpaudās Zādē idejā, izmantot daudzvērtīgu loģiku, lai aprakstītu sarežģītu elektrisku sistēmu uzvedību. Vēlāk ideja tika attīstīta kā nestrikto kopu koncepcija. Pēc šī darba Zādē sarakstīja daudzus rakstus, kuros tika aplūkoti dažādi nestrikto kopu teorijas un nestriktas loģikas aspekti un ar to saistītās problēmas. Zādē ieviestā nestrikto kopu teorija nepalika nepamanīta. Nākamajās dekādēs tika publicēti vairāki nozīmīgi raksti, kuros aplūktas nestriktas kopas teorētiskās matemātikas kontekstā: topoloģijā; algebrā; mēra un integrāļa teorijā, kā arī pielietojumos lēmumu pieņemšanā, sistēmu analizē, u.c. 20. gadsimta pēdējā ceturksnī un 21. gadsimta sākumā radās daudz darbu, kur dažādās tradicionālās teorētiskās matemātikas nozares tika aplūktas nestrikto kopu kontekstā: topoloģija, algebra, diferenciālvienādojumi, varbūtību teorija un matemātiskā statistika, matemātiskā modelēšana u.c. Darbos tika aplūkoti arī nestriktās matemātikas pielietojumi

citās zinātnēs: medicīnā, bioloģijā, ģeoloģijā, ķīmijā u.c. Tika attīstīti nestrikto kopu un nestriktās loģikas likumu pielietojumi inženierzinātnēs un ražošanā.

## 1.2. Ar nestriktām kopām saistīti pētījumi Latvijā

Pirmie darbi Latvijā, kur tika izmantotas nestrikas kopas, ir attiecināmi uz pagājušā gadsimta septiņdesmito gadu beigām, un to autori ir RTU (toreiz Rīgas Politehniskais Institūts) profesors A. Borisovs un viņa doktoranti A. Aleksejevs un I. Fedorovs. Šajos darbos nestrikas kopas tika veiksmīgi pielietotas risinot attēlu atpazīšanas problēmas un ar vadības kontroli saistītus uzdevumus.

No XX gadsimta 80-to gadu vidus Latvijas Universitātē intensīvus pētījumus matemātisko struktūru nestriktu kopu kontekstā uzsāka A. Šostaks. Viņa pirmie raksti nestriktās matemātikas jomā veltīti topoloģiskām telpām nestriktu kopu kontekstā. Tāpat A. Šostaka un līdzautoru darbos ir aplūkotas nestrikas uniformas un nestrikas proksimālas telpas. Šajā jomā strādāja I. Uljane, kuras disertācija bija veltīta nestriktām topoloģiskām struktūrām daudzvērtīgās kopās (zinātniskais vadītājs A.Šostaks, disertācija aizstāvēta 2009. gadā), I. Zvina pētīja kā īstenot nestrikta tipa vispārinājumu topoloģiskai telpai, kuru raksturo ideāli. Vēlāk šīs koncepcijas ideja tika attīstīta viņas disertācijā (zinātniskais vadītājs A. Šostaks, disertācija aizstāvēta 2010. gadā) par svarīgu teoriju, kas atklāja nozīmīgu sakarību starp nestriktu topoloģiju, režģiem un lokāļiem. Kopš pagājušā gadsimta beigām S. Solovjovs uzsāka pētīt nestriktu kopu kategoriālos aspektus (zinātniskais vadītājs A. Šostaks, disertācija aizstāvēta 2007. gadā). Kopš XXI gadsimta sākuma pētījumus nestriktās matemātikas kontekstā veic mēra un integrāļa teorija speciāliste LU profesore S. Asmuss. Atšķirībā no citu autoru rakstiem, kuros tiek aplūkoti mērs un integrālis nestriktu kopu kontekstā, profesore S. Asmuss un viņas doktoranta V. Ruža (disertācija aizstāvēta 2012. gadā) attīstītajā teorijā ne tikai kopas ir nestrikas, bet arī integrālis pieņem nestrikas reālās vērtības. XXI gadsimta pirmajā desmitgadē strauji sāka attīstīties agregācijas operatoru teorija nestriktās matemātikas kontekstā. Iedvesmojoties no aktuāliem referātiem nestriktai matemātikai veltītās konferencēs (piemēram, FSTA 2008, FSTA 2010) Latvijas Universitātes Matemātikas nodaļas doktoranti pievērsās nestrikto agregācijas operatoru teorijas problemātikai. Aktīvi šajā jomā strādāja J. Lebedinska (zinātniskais vadītājs A. Šostaks, disertācija aizstāvēta 2010. gadā), O.Grigorenko (zinātniskais vadītājs A. Šostaks, disertācija aizstāvēta 2012. gadā) un P. Orlovs (zinātniskā vadītāja S. Asmuss, disertācijas aizstāvēšana plānota 2013. gadā).

Pēdējos gados nopietni pētījumi nestriktu matemātikas kontekstā atsākās Rīgas Tehniskajā universitātē. Atšķirībā no Latvijas Universitātē veikto pētījumu tematikas, RTU realizētajos pētījumos akcents tiek likts uz praktiskiem nestriktu kopu lietojumiem, tā cienīgi turpinot 20. gadsimta septiņdesmit-astoņdesmitajos gados universitātē aizsāktās tradīcijas. Piemēram, savā doktora disertācijā (zinātniskais vadītājs prof. G. Lauks, aizstāvēta 2011. gadā) J. Jelinskis izveidoja jaunu, uz nestriktām kopām balstītu telekomunikāciju sistēmu projektēšanas metodi un parādīja, ka jaunajai metodei ir būtiskas priekšrocības salīdzinājumā ar tradicionālām, uz sliekšņiem balstītām metodēm.

### 1.3. No nestriktām kopām uz daudzvērtīgām matemātiskām struktūrām

Nestriktu kopu un uz tām balstītais nestriktās loģikas aparāts plaši tiek lietots gan teorētiskās matemātikas jomā, gan tās lietojumos. Tomēr, XX gadsimta beigās, zinātnes attīstības rezultātā, radās nepieciešamība paralēli nestriktu kopu teorijai attīstīt alternatīvas koncepcijas, ar kuru palīdzību būtu iespējams aprakstīt un pētīt situācijas, kur parastas nestriktas kopas ir „bezpēcīgas”. Kā šādu koncepciju veiksmīgus piemērus var minēt L-nestriktas kopas un daudzvērtīgas matemātiskas struktūras. Tajās, atšķirībā no nestriktām kopām, kuru vērtības ir vienības intervālā starp 0 un 1, vērtību kopa L var būt jebkurš  $cl$ -monoīds, kvantālis, vai pat vēl vispārīgāka rakstura objekts. Jāatzīmē, ka daudzvērtīga struktūra ir plašāks jēdziens kā L-nestriktā kopa, jo tajā jau bāzē var būt kāds nestrikts raksturlielums. Piemēram, sākotnējā „bāzes” kopā var būt ieviesta L-nestrikta vienādība, kura nosaka, cik lielā mērā divi bāzes kopas elementi ir vienādi. Dabiskā kārtā varam runāt par abu koncepciju sintēzi, tātad par L-nestriktām daudzvērtīgām matemātiskām struktūrām, kurām ir būtiski lietojumi dažāda rakstura pētījumos. Tātad, no vienas puses, L-nestriktu un daudzvērtīgu struktūru pielietojumu loks ir daudz plašāks, bet no otras, ar tām saistītās matemātiskās problēmas kļūst būtiski sarežģītākas. Pie tam papildus grūtības rada tas, ka veicot pētījumus, jāņem vērā kāds objekts ir struktūras vērtību kopa, šī objekta algebriskās īpašības. Tieši dažādu L-nestriktu un daudzvērtīgu un L-nestrikti daudzvērtīgu matemātisku struktūru izpēte ir mūsu kvanta mērķis. Sīkāk to iztirzāsim nākamajā sadaļā. Bet pašlaik pasvītrosim, ka mūsu grupas lielā pieredze, pētot matemātiskas struktūras nestriktu kopu kontekstā, kas tika aprakstīta augstāk, liecināja par labu potenciālu veikt pētījumus šajā jomā un zināmā nozīmē kalpoja kā garants, ka veiksmīgi tiks izpildīti projektā paredzētie uzdevumi un sasniegti tā mērķi.

### 1.4. Kvanta „Daudzvērtīgas matemātiskas struktūras un to lietojumi procesu modelēšanā” darba grupas pētījumu mērķis šī projekta ietvaros

Kvanta grupas darba pamatmērķis ir pētīt aktuālas ar L-nestriktām, daudzvērtīgām un L-nestrikti daudzvērtīgām matemātiskām struktūrām saistītās problēmas, konkrēti – pētīt topoloģiskas, algebriskas un analītiskas struktūras un, balstoties uz iegūtajiem rezultātiem, pilnveidot L-nestriktu, daudzvērtīgu un L-nestrikti daudzvērtīgu matemātisku struktūru teoriju. Šīs teorijas ietvaros konstruēt dažādu (L-nestrikti) daudzvērtīgu matemātisku struktūru L-vērtīgas kategorijas un pētīt šo kategoriju īpašības. Izstrādāt agregācijas operatoru, tai skaitā mēra un integrāļa konstrukcijas (L-nestrikti) daudzvērtīgu struktūru kontekstā. Attīstīt aproksimatīvu sistēmu teoriju (L-nestrikti) daudzvērtīgu matemātisku struktūru kontekstā un, par pamatu ņemot šajā jomā iegūtos rezultātus, aprakstīt aproksimatīvas sistēmas daudzvērtīgas informācijas gadījumā.

## 2. Projekta ietvaros galveno iegūto rezultātu apskats

Visus galvenos projekta ietvaros iegūtos rezultātus apskatīsim pa sadaļām.

### 2.1. Fundamentālie pētījumi daudzvērtīgu matemātisku struktūru jomā

Galvenā uzmanība šajā virzienā tika veltīta jaunas topoloģisku struktūru teorijas attīstībai, kas ļautu veidot topoloģiskas struktūras virs algebrām no patvaļīgas varietātes. Šāda teorija varētu kļūt par pamatu jaunai pieejai topoloģijai, kas apvienotu klasisko topoloģiju un vairākus tās vispārinājumus, proti, daudzvērtīgo topoloģiju. Projekta darba rezultātā tika izstrādāti jaunās teorijas pamati (pašu teoriju nosaucot par *kategoriski-algebrisku topoloģiju*), tika iegūti vairāki jaunās teorijas rezultāti, kā arī tika apskatīti šo rezultātu pielietojumi dažādās matemātikas nozarēs.

Kā svarīgākos no šajā virzienā iegūtiem rezultātiem atzīmēsim šādus.

Projekta izpildes rezultātā matemātikā labi attīstīta un plaši lietojama topoloģisku un algebrisku struktūru dualitātes teorija tika vispārināta kategoriski-algebriskai topoloģijai. Tas, savukārt, ļauj dualitātes teoriju izmantot daudzvērtīgu topoloģisku un algebrisku struktūru pētīšanai. Ir izpētīta matemātikā labi pazīstamā Pristlija dualitāte starp noteikta veida sakārtotām topoloģiskām telpām (tā saucamajām *Pristlija telpām*) un distributīviem režģiem un izstrādāts tās analogs kategoriski-algebriskai topoloģijai. Iegūtie rezultāti tiek izmantoti daudzvērtīgu topoloģisku un algebrisku struktūru pētīšanai. Ir izpētīts arī topoloģisku un algebrisku struktūru dualitātes teorijas vispārinājums kategoriski-algebriskai topoloģijai gan ar fiksētās, gan ar mainīgas bāzes pieeju.

Tika izpētīta iespēja konstruēt topoloģiskas telpas virs kvantāļu algebroīdiem. Pētot šo problēmu, tika iztirzātas un savā starpa salīdzinātas kā fiksētās tā arī mainīgās bāzes iespējas. Jāatzīmē, ka kvantāļu algebroīdi vispārina *kvantaloīdus*, kas nesēn tika atzīti par nestrikas matemātikas pamatu. Pētījuma gaitā tika arī parādīts, ka kvantāļu algebroīdus var raksturot kā labi pazīstamās kvantaloīda koncepcijas fazifikāciju. Projekta ietvaros tika pētīts arī kvantāļu algebroīdu speciālais gadījums – *kvantāļu algebras*. No šajā jomā iegūtajiem rezultātiem, kā svarīgāko, atzīmēsim izstrādāto kvantoru teorijas vispārinājumu kvantāļu algebrām. Ir apskatīts un izpētīts labi pazīstamā kodola jēdziena vispārinājums kvantāļu algebrām. Šajā sakarā ir jāatzīmē, ka kodoli ir viens no galvenajiem rīkiem sakārtotu algebrisku struktūru kongruenču pētījumos, un projekta ietvaros iegūtajam šī jēdziena vispārinājumam ir labas perspektīvas daudzvērtīgu algebrisku un topoloģisku struktūru teorijā. Izpētīta saikne starp kvantāļu algebrām un fazificētiem freimiem, kas paver jaunas perspektīvas kvantāļu algebru aparāta izmantošanai daudzvērtīgu matemātisku struktūru teorijā un tās lietojumos.

Daudzvērtīgu matemātisku struktūru teorijā svarīgu lomu spēle hipergrafa funktori. Piemēram, hipergrafi ir nepieciešami veicot pāreju starp klasisko un nestrikto topoloģiju. Projekta izpildes rezultātā tika apskatīta saikne starp hipergrafa funktoiem un saistības sistēmām kategoriski-algebriskas topoloģijas ietvaros, kas savukārt tika izmantota daudzvērtīgu topoloģisku struktūru pētījumos.

Tika definēts topoloģisku sistēmu analogs kategoriski-algebriskai topoloģijai, tai skaitā daudzvērtīgai topoloģijai. Tika parādīts, ka jauno topoloģisko sistēmu aparāts pieļauj klasiskajā pieejā labi pazīstamās procedūras, ieskaitot topoloģiskas sistēmas telpifikāciju (spacification) un radot iespēju attīstīt šo procedūru realizācijas shēmas. Šis aparāts tiek pielietots arī, lai reprezentētu lokālus kategoriski-algebriskas topoloģiskas sistēmas ietvaros. Ir pierādīts, ka kategoriski-algebriskas topoloģiskas sistēmas iekļauj sevī stāvokļu īpašību sistēmas, kas ir viena no mūsdienu teorētiskās fizikas galvenajām sastāvdaļām. Tika veikti

pētījumi par stāvokļu īpašību sistēmām kategoriski-algebrisku topoloģisku sistēmu kontekstā. Ir apskatīta saikne starp saistības sistēmām un kategoriski-algebriskām topoloģiskām teorijām.

Viens no svarīgākajām daudzvērtīgu topoloģiju veidiem ir  $(L,M)$ -nestrikta topoloģija, kas pašlaik ir viena no dominējošām pieejām nestriktām topoloģijām. Projekta izpildes gaitā izdevās apskatīt  $(L,M)$ -nestrikta topoloģijas analoģu kategoriski-algebriskai topoloģijai. Ir izpētīts, kādā veidā  $(L,M)$ -nestriktā topoloģijā tiek izmantotas dažādas  $L$ -nestrikta algebriskas struktūras, piemēram, freimi.

Projekta izpildes gaitā izdevās apskatīt un izpētīt saikni starp daudzvērtīgo, tai skaitā nestriktu topoloģiju un nekomutatīvo topoloģiju, kas savukārt ļauj noskaidrot saikni starp nestriktu un kvantu topoloģiskām pieejām. Pasvītrosim, ka liela interese par šajā jomā iegūtajiem rezultātiem balstās arī uz pēdējā laikā arvien pieaugošo interesi par nekomutatīvu topoloģiju, tai skaitā par nekomutatīvu daudzvērtīgu topoloģijas variantu.

Projekta ietvaros tika pētītas arī kategoriski-algebrisku topoloģisku sistēmu kategoriju īpašības. Viens no interesantiem rezultātiem ir tas, ka šādām kategorijām ir nevis topoloģisks, bet algebrisks vai koalgebrisks raksturs. Ir aprakstītas un izpētītas robežas un korobežas kategoriski-algebrisku topoloģisku sistēmu kategorijās. Tas savukārt ļauj izmantot gan reizinājumus, gan koreizinājumus strādājot kategoriski-algebrisku topoloģisku sistēmu kategorijā. Ir likti eksponentkopu teorijas pamati kategoriski-algebriskai topoloģijai, kas savukārt ļauj eksponentkopu teorijas metodes un rezultātus izmantot daudzvērtīgu topoloģisku struktūru pētījumos un lietojumos. Šajā sakarā ir jāatzīmē, ka eksponentkopu teorija ir galvenā klasiskās topoloģijas sastāvdaļa un šīs teorijas iegūtajam vispārinājumam daudzvērtīgajā kontekstā perspektīvā varētu būt liela loma. Pierādīts, ka kategoriski-algebriskas topoloģiskas sistēmas dod ērtu vidi formālai konceptu analīzei, kā arī vispārina saistības sistēmas jēdzienu.

Projekta izpildes gaitā ir pierādīts, ka paplašināta sakārtojuma algebru kategorija sevī ietver klasisko sakārtotu kopu kategoriju. Pētījumi projekta ietvaros liecina arī par to, ka paplašināta sakārtojuma algebras ietver sevī svarīgākās nestriktās matemātikas algebriskās struktūras, tajā skaitā nestrikta grupas un nestrikto reģģus. Atrasti un rūpīgi izpētīti nosacījumi, kad paplašinātu sakārtojumu algebru kategorijas ir Dekarta slēgtas.

Ir doti stingri kategoriski pamati kategoriski-algebriskai topoloģijai un kategoriski-algebriskām topoloģiskām sistēmām, kā arī tiek pierādītas jaunas struktūru īpašības. Piemēram, kategoriski-algebrisku topoloģisku telpu kategorijām ir topoloģisks raksturs. Ir parādīts, kā var attīstīt vairāku topoloģisku telpu teoriju, tajā skaitā labi pazīstamu topoloģisku telpu un lokāļu teorijas (tā saucamā *bezpunktu topoloģija*) analoģu kategoriski-algebriskās topoloģijās. Konstruēta saikne starp kategoriski-algebriskām topoloģiskām sistēmām un Artina salīmēšanu. Jāatzīmē, ka Artina salīmēšanai ir nozīmīga loma koalgebru teorijā. Ir attīstīta arī kategoriāla pieeja kategoriski-algebriskām topoloģiskām teorijām, kas ļauj strādāt ar kategorisku topoloģiju līdzīgi kā ar kategorisku algebru.

Ir ieviests algebriski-topoloģiskas sistēmas jēdziens, un ir izpētīta tā saikne ar saistības sistēmām. Atrasts interesants netriviāls sakars ar algebrisku topoloģiju. Parādīts, ka tā saucamā universālā topoloģija (kas pašlaik ir dominējošā pieeja kategoriskai topoloģijai) ir kategoriski-algebriskas topoloģijas speciāls gadījums. Atrasti svarīgi kategoriski-algebriskas topoloģijas pielietojumi klasiskās topoloģijas rezultātu vispārinājumos. Konstruētas topoloģiskas telpas reprezentācijas kā vispārinātas daudzvērtīgas sakārtotas kopas analoģs kategoriski-algebriskai topoloģijai.

Uzsākta daudzvērtīgu mīkstu algebru teorijas izveide. Ir konstruēta daudzvērtīgu mīkstu algebru kategorija un izpētītas iniciālās un finālās konstrukcijas šajā kategorijā, kas savukārt, ļauj strādāt ar reizinājumiem un koreizinājumiem šajā kategorijā. Jāatzīmē, ka zinātnieku vidū

pēdējos gados pieauga interese par mīkstām kopām, uzskatot, ka mīksta kopas var būt pozicionētas kā alternatīva pieeja nestriktām kopām.

Ir konstruēts slēgta attēlojuma vispārinājums monoidālai topoloģijai un izpētītas tā izmantošanas iespējas kategoriski-algebriskās topoloģijas problēmu risināšanai. Šajā jomā starp citiem svarīgajiem iegūtajiem rezultātiem jāatzīmē labi zināmās un plaši izmantojamās Kuratovska – Mrovkas teorēmas monoidālos un kategoriski-algebriskos analogus. Ir apskatīts labi attīstītās topoloģisku un algebrisku struktūru dualitātes teorijas vispārinājums monoidālajai topoloģijai. Konstruēta vispārināta fazifikācijas procedūra daudzvērtīgām topoloģiskām kategorijām monoidālas un kategoriski-algebriskas topoloģijas ietvaros.

## 2.2. Daudzvērtīgas topoloģiskas struktūras

Nestrikta topoloģiska rakstura struktūru izpētes pirmsākumi ir meklējami A.Šostaka 20. gadsimta 80-to gadu beigās publicētajos darbos. Tajos tika attīstīta nestrikta topoloģisku telpu teorija. Tomēr, pēdējā laikā aktualizējas problēma tieši par L-vērtīgu un daudzvērtīgu topoloģisku telpu teoriju izveidi. Aktualizējas problēmas par topoloģiska rakstura struktūru ieviešanu, kurās ne tikai starta kopas objekti ir daudzvērtīgi, bet arī finiša kopa var būt daudzvērtīga. Kļūst aktuāls jautājums par tādu ar daudzvērtīgām topoloģijām saistītu struktūru ieviešanu, kā daudzvērtīgas uniformas, daudzvērtīgas proksimālās un vēl vispārīgākas, daudzvērtīgas sintopogēnas struktūras, un par pilnvērtīgu attiecīgo struktūru teoriju izstrādi. Tieši šī problemātika tika pētīta projekta ietvaros un galvenie šajā jomā iegūtie rezultāti ir apskatīti šajā sadaļā.

Mīksto kopu (soft sets) aparāts tika izmantots vairāku daudzvērtīgu topoloģisku telpu kategoriju pētījumos. Proti, mīkstu kopu kategorijas ietvaros tika raksturotas parastu topoloģisku telpu kategorija, nestrikta topoloģisku telpu kategorija, L-vērtīgu topoloģisku telpu kategorija, (L,M)-nestrikta topoloģisku telpu kategorija, kur L ir patvaļīgs bezgalīgi distributīvs režģis, bet M ir pilnīgi distributīvs, un daudzvērtīgu topoloģisku telpu kategorija. Mīkstu kopu aparāts deva iespējas iegūt jaunu svarīgu informāciju par katru no šīm kategorijām. Piemēram, ar mīkstu kopu aparāta palīdzību tika izstrādātās jaunas efektīvas metodes iniciālo un finālo struktūru konstruēšanai un pētīšanai šajās kategorijās. Atzīmēsim, ka mīkstu kopu aparāts līdz šim vēl nav bijis izmantots topoloģiska rakstura telpu pētīšanai.

Ir konstruēts funktors starp M-vērtīgām L-topoloģiskām telpām un  $\text{Idl}(M)$ -vērtīgām topoloģiskām telpām, kur L ir jebkurš bezgalīgi distributīvs pilns režģis, M ir pilnīgi distributīvs režģis, bet  $\text{Idl}(M)$  ir visu režģa M ideālu pilnais režģis. Šī konstrukcija tiek pielietota, lai izpētītu pilno režģi, ko veido visu (L,M)-nestrikta topoloģijas un M-vērtīgas L-topoloģijas dotajā kopā.

Iegūti jauni rezultāti saistībā ar japāņu matemātiķa Namiokas problēmu. Šī problēma ir pazīstama kopš pagājuša gadsimta 80-tajiem gadiem. Problēmas būtība ir raksturot punktu kopas, kurās reālvērtīga funkcija, kas ir definētā divu topoloģisku telpu reizinājumā un kas ir parciāli nepārtraukta, tātad ir nepārtraukta katrai koordinātei atsevišķi, ir pilnīgi nepārtraukta šīs kopas punktos. Attiecīgos rezultātus mēs ieguvām balstoties uz topoloģisku spēļu metodēm. Papildus klasiskās problēmas daļējai atrisināšanai, izdevās iegūt arī analogiskus rezultātus par Namiokas problēmas daudzvērtīgu variantu, kas līdz šim vispār nebija pētīts.

Sintopogēnas struktūras un sintopogēnas telpas jēdzieni tika ievesti 1963. gadā ungāru matemātiķa A. Časara (A. Csaszar) darbos. Vēlāk A. Časara un citu zinātnieku darbos tika attīstīta sintopogēnu struktūru teorija, kura atrada veiksmīgus lietojumus pētot dažādu līmeņu



ar topoloģiju saistītas kategorijas, proti, topoloģisku telpu, vienmērīgu telpu un proksimālu telpu kategorijas. Pēdēja laikā, sakarā ar arvien pieaugušo interesi par daudzvērtīgam struktūrām, parādījās nepieciešamība attīstīt arī daudzvērtīgu sintopogēnu telpu teorijas analogu un pielietot to daudzvērtīgu topoloģisku, uniformu un proksimālu telpu kategoriju izpētei. Šajā jomā projekta ietvaros veikto pētījumu rezultātā ir ieviesti daudzvērtīgas sintopogēnas un L-vērtīgu sintopogēnu struktūru jēdzieni, kur L ir pilns bezgalīgi distributīvs režģis ar tajā definētu implikatoru, kas, piemēram, varētu būt uzdots ar pusnepārtrauktu no apakšas t-normu. Definēti nepārtraukti attēlojumi starp divām daudzvērtīgam sintopogēnām telpām. Uz sintopogēno telpu un attiecīgo nepārtraukto attēlojumu pamata konstruēta kategorija SYNT(L). Ir izpētītas L-nestriktu sintopogēnu telpu kategorijas būtiskas īpašības; reizinājumi un koreizinājuma operācijas šajā kategorijā; iniciālas un finālas struktūras, u.c. Kā svarīgāko zinātnisko ieguvumu šajā jomā jāmin rezultāti, kas iegūti raksturojot un pētot kategorijas SYNT(L) ietvaros daudzvērtīgu topoloģisku telpu, daudzvērtīgu uniformu telpu un daudzvērtīgu proksimālu telpu kategorijas.

Likti pirmie pamati pētījumiem par daudzvērtīgu metriku un daudzvērtīgu pseidometriku izmantošanu digitālās topoloģijas problēmu risināšanai; šos pētījumus tiek plānots turpināt pēc projekta beigšanas, ņemot vērā, ka attiecīgajiem rezultātiem perspektīvā var būt nopietni pielietojumi teorētiskā datorzinātnē.

### 2.3. Daudzvērtīgas bornoloģijas

Ierobežotas kopas un ar to saistītais ierobežotas funkcija jēdziens ir viens no svarīgākajiem pamatjēdzieniem gan metrisku telpu, gan topoloģisku vektoru telpu teorijā. Ar mērķi attīstīt šo koncepciju tā, lai to varētu izmantot arī vispārīgu topoloģisku telpu teorijā, amerikāņu matemātiķis S.T. Hu 1943. gadā ieviesa bornoloģijas un bornoloģisku telpu koncepcijas. Vēlāk S.T. Hu un citi autori izstrādāja pilnvērtīgu bornoloģiju teoriju un izmantoja to dažādās matemātikas jomās. Projekta mērķis šajā jomā bija izstrādāt daudzvērtīgas bornoloģijas koncepciju un attīstīt attiecīgo daudzvērtīgu bornoloģisku telpu teoriju.

Projekta ietvaros bija paredzēts izstrādāt bornoloģijas koncepciju daudzvērtīgā kontekstā. Tika izstrādātas divas principiāli atšķirīgas bornoloģijas koncepcijas nestriktās matemātikas kontekstā. Pirmā - L-nestrikta bornoloģija kopā pēc būtības ir šīs kopas visu L-apakškopu saimes ideāls, kas pārklāj visu kopu. Viens no pētījumu aspektiem šajā kontekstā ir rezultātu iegūšana, kas saistīta ar L-nestriktu bornoloģiju režģa struktūras aprakstīšanu un raksturošanu. Otrais svarīgs aspekts ir L-nestriktu bornoloģisku telpu kategorijas definēšana un izpēte. Šim nolūkam ir ieviests ierobežots attēlojums starp L-nestriktām bornoloģiskām telpām. L-nestriktas bornoloģiskas telpas un ierobežoti attēlojumi veido L-nestriktu bornoloģiju kategoriju. Šajā kategorijā ir konstruētas iniciālā un finālās struktūras L-nestriktas bornoloģijas ierobežotu attēlojumu saimei. Savukārt iniciālas un finālas struktūras ļauj strādāt ar reizinājuma, koreizinājuma un faktorizācijas konstrukcijām L-nestriktu bornoloģiju kategorijā.

Otra, alternatīva pieeja bornoloģijas koncepcijas fazifikācijai tiek balstīta uz L-vērtīga attēlojuma kopas eksponentē. L-vērtīga bornoloģija kopā ir attēlojums no kopas eksponentes uz režģi L, kas apmierina parastas bornoloģijas aksiomu L-nestriktas modifikācijas. L-vērtīga bornoloģija tiek interpretēta kā attēlojums, kas katrai kopas apakškopai piekārto ierobežotības pakāpi. Kopa ar tajā definēto L-vērtīgo bornoloģiju, veido L-vērtīgu bornoloģisku telpu. Tiek definēts ierobežots attēlojums starp L-vērtīgām bornoloģiskām telpām. L-vērtīgas bornoloģiskas telpas un ierobežoti attēlojumi starp tām veido kategoriju. Ir izpētītas šīs

kategorijas pamatīpašības. Ir pierādīts, ka šī kategorija ir topoloģiska virs kopu kategorijas SET.

Ir izstrādāta konstrukcija, kā no parastu bornoloģiju ķēdes konstruēt L-vērtīgu bornoloģiju. Ir izpētītas šādi konstruētās L-vērtīgās bornoloģijas specialās īpašības. Interesanti rezultāti ir iegūti pētot iespējas konstruēt L-vērtīgas bornoloģijas no nestriktām metrikām un nestriktām pseidometrikām un šo L-vērtīgu bornoloģisku telpu īpašību.

## 2.4. Aproksimatīvas sistēmas

Ir ieviests M-aproksimatīvas sistēmas jēdziens, kur M ir pilns bezgalīgi distributīvs režģis, bagātināts ar komutatīvu, asociatīvu operāciju. M-aproksimatīvas sistēmas jēdziens balstās uz augšējo un apakšējo M-aproksimācijas operatoriem, kuri definēti pilnā bezgalīgi distributīvā režģī L un pieņem vērtības pilnā pilnīgi distributīvā režģī M. Projekta izpildes gaitā ir attīstīta vispārīgā M-aproksimatīvu sistēmu teorija. Ir izdalītas speciālas M-aproksimācijas sistēmas – no augšas pusnepārtrauktas M-aproksimatīvas sistēmas, no apakšas pusnepārtrauktas M-aproksimatīvas sistēmas un involutīvas M-aproksimatīvas sistēmas; detalizēti izpētītas šo sistēmu svarīgākas īpašības. Šāda tipa sistēmām ir sevišķa loma daudzvērtīgu topoloģisku struktūru pētījumos. Tika izanalizētas M-aproksimatīvas sistēmas pie fiksētas bāzes L. Izmantojot projekta ietvaros izstrādāto topoloģizācijas metodi, pierādīts, ka pie dabiska sakārtojuma M-aproksimatīvas sistēmas ar fiksētu bāzi veido pilnu bezgalīgi distributīvu režģi. Ir izpētīta šī režģa struktūra.

Ir konstruēti morfismi starp M-aproksimatīvām sistēmām gan pie fiksētas, gan pie mainīgas bāzes L un uz to pamata konstruēta M-aproksimatīvu sistēmu kategorija AS(M). Tika izpētītas kategorijas AS(M) fundamentālas īpašības. Šajā kategorijā morfismu saimēm ir uzkonstruētas iniciālās un finālās struktūras, kas savukārt ļauj strādāt ar reizinājuma un koreizinājuma operācijām, kā arī definēt M-aproksimatīvu sistēmu faktorizāciju. Ir pierādīts, ka kategorija AS(M) ir topoloģiska virs bezgalīgu distributīvu režģu jeb freimu kategorijas FRM. Ir noskaidrots, ka kategorijas AS(M) apakškategorijas SCA-AS(M) un I-AS(M), kuras attiecīgi veido pusnepārtrauktas no augšas un involutīvas M-aproksimatīvas sistēmas, ir refleksiņas un korefleksiņas pamatkategorijā AS(M). Konstruētas arī iniciālās un finālās struktūras apakškategorijās SCA-AS(M) un I-AS(M).

Viens no M-aproksimatīvu operatoru un M-aproksimatīvas sistēmas ieviešanas un izpētīšanas mērķiem ir labas perspektīvas to izmantošanai dažādu topoloģiska rakstura objektu konstruēšanai un pētīšanai. Projekta izpildes gaitā kategorijas AS(M) ietvaros tiek pētītas daudzvērtīgu, jeb (L,M)-topoloģisku telpu kategorijas, Čanga-Gogēna L-nestriktu topoloģisku telpu kategorijas, Hattona nestriktu topoloģiju kategorijas, Rodabauha L-nestrikta topoloģisku telpu ar mainīgu bāzi L kategorijas. Atzīmēsim, ka tieši M-aproksimatīvas sistēmas koncepcija un uz tās bāzes attīstītā teorija ļauj izmantot vienotu pieeju visu šo kategoriju pētījumiem. Šī pieeja balstās uz iekšienes un slēguma operatoriem - topoloģiskiem operatoriem, kuri tiek interpretēti attiecīgi kā apakšējie un augšējie M-aproksimācijas operatori.

Līdzas svarīgai lomai M-aproksimatīvu operatoru un M-aproksimatīvu sistēmu problēmās, kas saistītas ar daudzvērtīgu topoloģisku struktūru izpēti, M-aproksimatīviem operatoriem un M-aproksimatīvām sistēmām ir arī perspektīvi lietojumi raupjo kopu pētījumos. Šajā sakarā atzīmēsim, ka pēdēja laikā būtiski augusi pētnieku interese par 1983. gadā poļu zinātnieka Z. Pavlaka darbos ieviesto raupjas kopas koncepciju, prognozējot labas iespējām to pielietot risinot lielas datu informācijas apjomu apstrādāšanu problēmas pie minimālām apstrādes

izmaksām. Projekta ietvaros ar M-aproksimatīvu sistēmu teorijas palīdzību tika izpētītas gan parastas raupjas kopas, gan nestrikas raupjas kopas, gan daudzvērtīgas raupju kopas. Šim nolūkam apakšējais un augšējais M-aproksimatīvie operatori tika interpretēti, attiecīgi, kā kopas iekšējā un ārējā aproksimācijas.

Risinot praktiskas problēmas nereti nācās saskarties ar defazifikācijas problēmu, kad ir nepieciešams nestriktu vai daudzvērtīgu matemātisku objektu aizvietot ar visatbilstošāko klasiskās matemātiskas objektu. Tika izpētīts, kā izmantot projekta ietvaros ieviestās M-aproksimatīvās sistēmas defazifikāciju problēmu risināšanai. Iegūtie rezultāti tika aprobēti ar vairākiem konkrētiem piemēriem.

Projekta ietvaros tika iesākti arī aproksimatīvu sistēmu ar mainīgo finiša kopu M pētījumi. Konkrēti, šajā situācijā daudzvērtība paradās ne tikai pirmajā, bet arī otrajā līmenī. Šis aproksimatīvās sistēmas vispārinājums ietver kategoriski-algebriskas topoloģijas un topoloģiskas sistēmas ar mainīgo bāzi kā speciālu gadījumu. Izpētīta aproksimatīvu sistēmu ar mainīgo finiša kopu režģu struktūra. Ir konstruēti morfismi starp aproksimatīvām sistēmām un uz to pamata konstruēta aproksimatīvu sistēmu kategorija AS. Ir detalizēti pētītas šīs kategorijas īpašības. Morfismu saimēm šajā kategorijā tiek konstruētas iniciālas un finālas konstrukcijas, kas savukārt ļauj strādāt ar reizinājuma un koreizinājuma operācijām un efektīvi konstruēt apakšobjektus un faktorobjektus. Ir pierādīts, ka kategorija AS ir topoloģiska virs pilnu bezgalīgu distributīvu režģu jeb freimu kategorijas FRM. Ir izdalītas speciālas aproksimatīvas sistēmas ar mainīgo finiša kopu – t.s. no augšas pusnepārtrauktas aproksimatīvas sistēmas un involutīvas aproksimatīvas sistēmas. Iepriekšējas rindkopās iztirzātā kategorija AS(M) tiek raksturota kā kategorijas AS refleksīva un korefleksīva apakškategorija. Ir pierādīts, ka Rodabauha darbos ieviestās topoloģiskas sistēmas ir aproksimatīvu sistēmu speciāls veids, kas ļauj izmantot aproksimatīvu sistēmu teorijas rezultātus Rodabauha topoloģisku sistēmu pētījumos.

## 2.5. Aproksimatīvas shēmas

Tika attīstīta daudzvērtīga pieeja aproksimāciju teorijā. Ar mērķi veikt aproksimatīvu shēmu pētījumus L-struktūrās aproksimācijas kļūda tika aprakstīta ar L-nestriktiem skaitļiem. Aproksimācijas metožu kvalitātes novērtējumam nestrikas informācijas gadījumā tika ieviesta nestrikti vērtīga norma un aprakstīta attiecīga normēta telpa. Normas uzdošanai izmantoti nestrikti vērtīgi lielumi, t.sk. nestrikti vērtīgs suprēms, nestrikti vērtīgs mērs un integrālis. Tika pētītas šīs pieejas iespējas aproksimācijas procesu uzlabošanai.

Attīstīta kombinēta splaina koncepcija. Tika izstrādāts histopolācijas modelis, kas ļauj kombinēt histopolācijas nosacījumus ar papildus nosacījumiem (tajā skaitā ar robežnosacījumiem). Veikti histosplainu pētījumi un attīstītas to konstruēšanas metodes. Metode ir aprobēta risinot histogrammu aproksimācijas uzdevumus. Veikti skaitliskie eksperimenti, ka arī skaitlisko eksperimentu rezultātu analīze. Ir uzlabota histogrammu neparametriskas aproksimācijas metode.

Kombinēta splaina aprakstam tika pielietota funkcionālā pieeja. Ir aplūkotas dažas konkrētas jaukta interpolācijas-nogrudināšanas uzdevuma nostādnes atkarībā no dotajiem datiem un nosacījumiem (tajā skaitā histopolācijas uzdevums, kad uzdevuma nostādņē kopā ar nevienādību tipa ierobežojumiem, kas raksturo laukumu, iekļauti svarīgi vienādības veida papildnosacījumi). Tika izpētīti šāda vispārīgā uzdevuma atrisinājumu eksistences un unitātes nosacījumi. Tika izpētīti jautājumi par jauktiem interpolācijas – nogrudinošiem splainiem: šādu splainu telpas definīcija; saistība starp splainu telpām, ko nosaka interpolācijas un

nogludināšanas operatori atsevišķi, un splainu telpu, ko nosaka abi divi operatori kopā; aplūkoti piemēri par šādas saistības izmantošanu splainu konstruēšanā dažu konkrētu splainu telpu gadījumos. Noformulēts vispārinātais nogludināšanas uzdevums ar svariem Hilberta telpās. Tika parādīts, ka no literatūras zināmus interpolācijas, nogludināšanas un jaukta tipa uzdevumus var iegūt no šāda vispārinātā uzdevuma kā speciālus gadījumus, izvēlējot atbilstošus operatorus. Pierādīta teorēma par šī vispārinātā uzdevuma atrisinājuma eksistenci un raksturojumu. Ir aprakstīti šāda tipa uzdevumu risināšanas metodes.

Tika turpināti pētījumi par vispārināto nogludināšanas uzdevumu ar svariem Hilberta telpās. Tika izanalizēti daži šāda uzdevuma speciālgadījumi, tajā skaitā gadījumi, kad divi operatori, kas uzdevumā nosaka dažādu tipu aproksimācijas nosacījumus, ir lineāri atkarīgi. Šiem speciālgadījumiem noformulēti nosacījumi atrisinājuma eksistencei, pierādītas teorēmas par atrisinājuma raksturojumiem. Visos gadījumos ir pierādīts, ka uzdevuma atrisinājums ir splains no atbilstošas splainu telpas. Tika pētīts jautājums kā iegūtos splaina-atrisinājuma raksturojumus var izmantot speciālgadījumu uzdevumu atrisinājuma konstruēšanai un/vai analīzei. Sīkāk tika izpētīts speciālgadījums, kad uzdevumā tiek kombinēti nogludināšanas nosacījumi ar svariem ar interpolācijas nosacījumiem. Analizētā gadījumā operators, kas nosaka interpolācijas nosacījumus, ir lineāri atkarīgs no operatora, kas nosaka nogludināšanas nosacījumus. Atrasti un pamatoti nosacījumi uzdevuma atrisinājuma eksistencei. Piedāvāts algoritms uzdevuma atrisinājuma konstruēšanai, kas skaitliski realizēts diviem konkrētiem šāda tipa uzdevumiem.

Uz splainu pamata attīstītas F-transformāciju (F no „fuzzy” - angl.) metodes. F-transformācijas, kuras, no vienas puses, izmanto nestrikas matemātikas idejas un metodes, un, no otras puses, dod iespēju saskatīt sakarību starp nepārtrauktu funkciju klasi un  $n$ -dimensionālu vektoru telpu, ir modificētas ņemot par pamatu polinomiālo splainu bāzes funkcijas nestrikto sadalījumu konstruēšanai. Modificētas F-transformācijas tika aprakstītas gadījumā, kad nestrikte sadalījumi ir uzdoti ar otrās un trešās pakāpes pirmā defekta splainiem. Tika atrastas tiešās un inversās modificētu F-transformāciju formulas, kuras ilustrētas un aprobētas ar testa piemēriem. Abos gadījumos F-transformācijām tika iegūti aproksimācijas kļūdas novērtējumi. Tika apskatītas arī F-transformācijas vispārinātā nestriktā sadalījuma gadījumā, kas ļāva novērst inversās transformācijas oscilācijas. Līdz ar to radās iespēja aproksimēt arī transformējamās funkcijas atvasinājumus. Tika pētīta aproksimācija ar splainiem pie Birkhofa interpolācijas nosacījumiem uz aproksimējamās funkcijas un tās atvasinājumu vērtībām.

## 2.6. L-nestriktais mērs un daudzvērtīgais integrālis

L-kopu kontekstā (gadījumā, kad L ir pilns, pilnīgi distributīvs režģis ar minimuma t-normu, maksimuma konormu un atbilstošu involūciju) izstrādāta nestrikta L-vērtīga mēra un integrāļa koncepcija un attīstīti L-nestrikta mēra un integrāļa teorijas pamati. Aprakstīta vispārīgā shēma parasto kopu mēra turpinājumam līdz L-kopu mēram ar vērtībām L-nestriktajā reālajā taisnē. Aprakstīts mērojamas attiecība pret L-vērtīgu mēru L-kopas jēdziens. Definēts L-nestrikti vērtīgs integrālis pa mērojamu L-kopu pēc L-nestrikti vērtīga mēra, aprakstītas integrējamās pēc L-nestrikti vērtīga mēra funkcijas, izpētītas L-nestrikti vērtīga integrāļa īpašības un aprakstītas integrāļa aprēķināšanas tuvinātas metodes.

Izmantojot L-nestrikti vērtīgu integrāli, uzdota L-nestrikti vērtīga norma, kura raksturo integrējamās funkcijas L-kopās. Izanalizētas šīs normas iespējas aproksimācijas procesu kvalitātes raksturošanai nestrikas informācijas gadījumā. Aproksimācijas kļūdas

aprēķināšanai L-nestriktās kopās tika pielietots L-nestrikti vērtīgs integrālis. Aprakstītas metodes aproksimācijas kļūdas pētīšanai L-nestriktās kopās gan funkcijām, gan funkciju klasēm. Metodes ir aprobētas pētot splainu aproksimācijas nestriktās kopās un pielietotas risinot ar aproksimācijas algoritmu salīdzināšanu un lēmumu pieņemšanu saistītus uzdevumus.

## 2.7. L-nestrikti agregāciju operatori un to lietojumi

Veikti pētījumi L-fazi reālo skaitļu (B.Hattona pieeja) teorijas jomā. Aprakstīti L-fazi reālo skaitļu agregācijas principi un izpētītas inducētā agregācijas operatora īpašības B.Hattona L-nestriktajā taisnē atkarībā no t-normas un inducējama agregācijas operatora īpašībām. Vispārinātas agregācijas pielietotas L-fazi reālo skaitļu algebrisku operāciju jomā, nestriktu matemātisku spēļu analīzē un vairāku kritēriju lineārās programmēšanas uzdevumu risināšanā.

Izmantojot ieviesto un aprakstīto faktoragregācijas konstrukciju pilnveidotas divu līmeņu lineārās programmēšanas uzdevumu risināšanas metodes gadījumā, kad augšējā līmenī ir viena mērķa funkcija, bet apakšējā līmenī – vairākas. Par darba pamatu ir ņemts nestrikta matemātikas algoritms optimālā plāna noteikšanai, meklējot kompromisu starp augšējā un apakšējā līmeņa mērķa funkciju optimālajām vērtībām. Uzdevuma risinājuma rezultāts ir atkarīgs no algoritmā izvēlētajiem parametriem. Ir izstrādāta algoritma parametru analīzes metode, kura izmanto speciāli šim mērķim uzdotu faktoragregācijas operatoru.

Uz nestrikta lineārās programmēšanas pamata attīstītas matricu spēļu analīzes metodes gadījumā, kad nenoteiktība spēles noteikumos ir modelēta lietojot nestriktus lielumus. Īpaša uzmanība pievērsta stratēģisko lēmumu pieņemšanai un spēles cenas novērtēšanai nenoteiktības apstākļos. Aprobētas un pamatotas līmeņu konstrukcijas šāda tipa uzdevumu risināšanai. Metodes pamatā ir nestriktās lineārās programmēšanas uzdevums, kuru reducējot, iegūst vairāku līmeņu lineārās programmēšanas uzdevumus. Divu līmeņu lineāro programmēšanu jāizmanto nestriktu matricu spēļu analīzei gadījumā, kad norēķinu matrica ir uzdota ar trīsstūrveida nestriktiem skaitļiem. Savukārt algoritmam, kurā izmanto vairāku līmeņu lineārās programmēšanas uzdevumu, priekšrocība salīdzinājumā ar citām metodēm ir tāda, ka to var pielietot arī spēles cenas analīzei matricu spēlēm, kuru norēķinu matricas elementi ir nestrikti skaitļi (tie var nebūt trīsstūrveida formā). Ar lēmumu pieņemšanu saistītu uzdevumu (tajā skaitā uzdevumu par stratēģisko lēmumu pieņemšanu spēļu teorijā) risināšanai apgūtās metodes ir salīdzinātas (izveidoti un izanalizēti testa piemēri, veikti skaitliskie aprēķini, iegūtie rezultāti izanalizēti un salīdzināti).

## 2.8. Daudzvērtīgie sakārtojumi

Šajā virzienā galvenie pētījumu objekti ir: daudzvērtīga sakārtojuma attiecības, parasto un daudzvērtīgo kopu attēlojumu monotonitātes pakāpes teorijas izveide un uz tā pamata daudzvērtīgas kategorijas konstruēšana, monotonitātes pakāpes teorijas lietojumi agregācijas procesos.

Izpētītas daudzvērtīga sakārtojuma teorijas iespējas informācijas agregācijas procesā un tās priekšrocības salīdzinot ar jau zināmām metodēm. Pētot daudzvērtīga sakārtojuma teoriju

agregācijas procesā, tika ieviests nestrikta monotoniātes jēdziens, kurš ir nestriktais analogs parastai monotoniātes jēdzienam un kuru var plaši lietot, risinot agregācijas uzdevumus. Tika definēta monotoniātes pakāpe, izmantojot nestrikta attiecības. Līdz ar to, atbilstoši šai koncepcijai, katra agregācijas funkcija ir monotona ar kaut kādu pakāpi, pretstatā klasiskajam gadījumam, kur viennozīmīgi funkcija *ir monotona vai nav monotona*. *Viena no daudzām jaunās monotoniātes koncepcijas priekšrocībām ir tā, ka strādājot ar datu bāzēm ir iespējams izvairīties no nelielām datu bāzes bojājuma kļūdām.*

Ir definētas daudzvērtīgas sakārtojuma attiecības klasiskajā kopā, L-kopā un L-vērtīgā kopā, kā arī ir definēta vāja daudzvērtīga sakārtojuma attiecība. Darbā ir apskatītas šo attiecību īpašības no kategoriju teorijas viedokļa: konstruētas daudzvērtīgas kategorijas un pētītas to īpašības. Konkrēti tiek izpētītas šādas kategoriju īpašības: speciāli objekti, speciāli morfismi, speciālas konstrukcijas un citas īpašības. Tā kā nestriktu kategoriju teorija ir radusies un attīstījusies divdesmit gadu laikā, radās nepieciešamība definēt un analizēt dažas īpašības, kuras nebija pētītas agrāk. Projekta ietvaros veiktā zinātniskā darba rezultātā, paralēli konkrētu kategoriju izpētei, tiek attīstīta daudzvērtīgu kategoriju teoriju kopumā. Darbā tiek izpētītas arī saiknes starp no jauna iegūtajām un jau agrāk zināmajām kategorijām.

Tiek izpētītas arī daudzvērtīga sakārtojuma lietojuma iespējas lineārās programmēšanas uzdevumu risināšanā. Tiek iegūti rezultāti par MOLP problēmu risināšanu, izmantojot daudzvērtīgo sakārtojumu un to agregāciju. Piemēri tika apstrādāti ar programmām Maple un R-project.

### 3. Sadarbība ar Latvijas un ārzemju kolēģiem

Projekta izpildītāji projekta norises laikā nostiprināja jau iepriekš esošos un dibināja jaunus zinātniskos kontaktus ar kolēģiem no Latvijas un ārzemēm. Viens no rādītājiem, kas liecina par stipriem un radošiem kontaktiem ar kolēģiem un par to lomu, ir procentuāli lielais kopējo publikāciju īpatsvars (sk. 4. sadaļu).

No zinātniskiem kontaktiem, kas būtiski stimulēja un sekmēja projekta izpildi atzīmēsim:

1. Latvija, Rīgas Tehniskā universitāte:  
Prof. G. Lauks, Dr. Inj. J. Jelinskis, Mg. Inj. J. Asmuss;
2. Igaunija, University of Tartu:  
Prof. Mati Abel, Prof. E. Oja, Dr. Math. Mart Abel;
3. Spānija, Bilbao, Universidad del Pais Vasco:  
Prof. Dr. Math. M.A. De Prada Vicente, prof. Dr. Math. J. Gutierrez Garcia,  
Dr. Math. I. Mardones Peres;
4. Spānija, Valensija, Valensijas Tehnologiskā universitāte:  
Dr. Math. Samuel Morillas Gomez;
5. Polija, Poznaņa, Adam Mickiewicz University:  
Prof. Dr. Habil Math T. Kubiak;
6. Vācija, Wuppertal, Bergisches Universitat:  
Prof. Dr. Habil. Math. U. Hohle;
7. Čehijas Republika, Centre of Excellence IT4 Innovations division of the University of Ostrava, Institute for Research and Applications of Fuzzy Modeling:  
Prof. Dr. Inj. Director V. Novak, prof. Dr. Math. I. Perfiliejva;
8. Slovākijas Republika, Bratislavas tehnoloģiskā universitāte:  
Prof. Dr. Math. R. Mesiar, prof. Dr. Math. M. Kalina;
9. Kanāda, Toronto, York University:  
Prof. Dr. Math. J. Steprāns, prof. Dr. Math. W. Tholen;
10. Dienvidkoreja, Chonbuk National University:  
Prof. Sang-Eon Han.

### 4. Projekta izpildītāju publikācijas

1. **S. Asmuss.** *On approximation under L-fuzzy information.* Abstarcts of the 10th International Conference on Fuzzy Set Theory and Applications, Liptovsky Jan, Slovak Republic, 2010, p. 18.
2. **S. Asmuss.** *On the error of approximation under L-fuzzy information.* Abstarcts of the 8th Latvian Mathematical Conference, Valmiera, Latvia, 2010, p. 5.
3. **S. Asmuss, N. Budkina.** *On mixed interpolating – smoothing splines.* Abstarcts of the 8th Latvian Mathematical Conference, Valmiera, Latvia, 2010, p. 6.
4. **J. Breidaks, S. Asmuss, N. Budkina.** *On construction of smoothing histosplines with boundary conditions.* Abstarcts of the 8th Latvian Mathematical Conference, Valmiera, Latvia, 2010, p. 14.

5. **S. Asmuss**, N. Budkina, J. Breidaks. *An analysis of smoothing-interpolating problems*. Abstracts of the 15th International Conference “Mathematical Modelling and Analysis”, Druskininkai, Lithuania, 2010, p. 2.
6. **S. Asmuss**, V. Ruza. *On an L-fuzzy valued norm defined by an L-fuzzy valued integral*. Proceedings of the 6th International Summer School on Aggregation Operators, AGOP 2011, Benevento, Italy, 2011, pp. 183–188.
7. **D. Dance**. *On concepts of the solution for matrix games with fuzzy payoffs*. Abstracts of the 16th International Conference “Mathematical Modelling and Analysis”, Sigulda, Latvia, 2011, p. 33.
8. V. Ruzha, **S. Asmuss**. *An analysis of approximation on an L-fuzzy set based on L-fuzzy valued integral*. Abstracts of the 16th International Conference “Mathematical Modelling and Analysis”, Sigulda, Latvia, 2011, p.109.
9. **S. Asmuss**, N. Budkina, J. Breidaks. *On smoothing problems with additional restrictions*. Abstracts of the 16th International Conference “Mathematical Modelling and Analysis”, Sigulda, Latvia, 2011, p. 7.
10. **S. Asmuss**, V. Ruza. *L-fuzzy valued measure and integral*. Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology EUSFLAT-LFA 2011, Aix-les-Bains, France, 2011, pp. 127–131. (ISI Web of Knowledge datubāzē)
11. **S. Asmuss**, V. Ruza. *On another approach to the definition of an L-fuzzy valued integral*. Proceedings of IEEE Conference on Fuzzy Systems FUZZ-IEEE 2011. Taipei, Taiwan, 2011, pp. 1598 – 1602. (IEEE datubāzē, SCOPUS datubāzē)
12. **S. Asmuss**, **A. Sostak**. *On spline methods of approximation under L-fuzzy information*. Proceedings of IEEE Conference on Fuzzy Systems FUZZ-IEEE 2011. Taipei, Taiwan, 2011, pp. 1610 – 1614. (IEEE datubāzē, SCOPUS datubāzē)
13. I. Vavilcenkova, **S. Asmuss**. *On spline based fuzzy transforms*. Abstracts of the 11th International Conference on Fuzzy Set Theory and Applications, Liptovsky Jan, Slovak Republic, 2012, p.106.
14. V. Ruza, **S. Asmuss**. *On estimation of approximation error on fuzzy sets by means of fuzzy valued integral*. Abstracts of the 11th International Conference on Fuzzy Set Theory and Applications, Liptovsky Jan, Slovak Republic, 2012, p. 94.
15. **D. Dance**. *On multi-objective linear programming approach for solving fuzzy matrix games*. Abstracts of the 11th International Conference on Fuzzy Set Theory and Applications, Liptovsky Jan, Slovak Republic, 2012, p. 35.
16. N. Budkina, **S. Asmuss**, J. Breidaks. *On smoothing splines with weights under additional conditions*. Abstracts of the 9th Latvian Mathematical Conference, Jelgava, Latvia, 2012, p. 13.
17. M. Kokainis, **S. Asmuss**. *On Birkhoff interpolation by polynomial splines*. Abstracts of the 9th Latvian Mathematical Conference, Jelgava, Latvia, 2012, p. 46.
18. P. Orlovs, **S. Asmuss**. *On general factoraggregation operators*. Abstracts of the 9th Latvian Mathematical Conference, Jelgava, Latvia, 2012, p. 48.
19. O. Montvida, **S. Asmuss**. *Parameters of solving bilevel linear programming problems and its analysis*. Abstracts of the 9th Latvian Mathematical Conference, Jelgava, Latvia, 2012, p. 41.



20. **S. Asmuss**, V. Ruza. *Approximation error on fuzzy sets and its estimation by means of fuzzy valued integral*. Abstarcts of the 9th Latvian Mathematical Conference, Jelgava, Latvia, 2012, p. 4.
21. **D. Dance**. *On multi-level programming approach for solving matrix games with fuzzy pay-offs*. International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics ISCAMI2012, Book of Abstarcts, Malenovice, Czech Republic, 2012, p. 16.
22. **S. Asmuss**, N. Budkina. *On some generalization of smoothing problems*. Abstarcts of the 17th International Conference “Mathematical Modelling and Analysis”, Tallinn, Estonia, 2012, p. 26.
23. **S. Asmuss**, V. Ruza. *Error based decision making on approximation methods under fuzziness*. Abstarcts of the 25th European Conference on Operational Research, Vilnius, Lithuania, 2012, p. 72.
24. **S. Asmuss**, V. Ruza. *L-fuzzy valued measure and integral*. Fuzzy Sets and Systems. (iesniegts)
25. **S. Asmuss**, N. Budkina. *On some generalization of smoothing problems*. Mathematical Modelling and Analysis. (iesniegts)
26. M. Abel, **A. Šostak**. *Towards the theory of L-bornological spaces*. Iranian J. of Fuzzy Systems, **8** (2011), pp. 19–28.
27. A. Elkin, **A. Šostak**. *On some categories of approximate systems generated by L-relations*. Proceedings of Workshop on Rough Sets Theory in September 14–16, 2011, p. 419.
28. A. Frascella, C. Guido, and **S. Solovyov**. *Dual attachment pairs in categorically-algebraic topology*. Appl. Gen. Topol. **12** (2011), no.2, pp. 101–134.
29. A. Frascella, C. Guido, **S. Solovyov**. *Algebraically-topological systems and attachment*. Iran. J. Fuzzy Syst. (pieņemts publicēšanai)
30. C. Guido, **S. Solovyov**, *Topological systems versus attachment relation*. Quaest. Math. (iesniegts)
31. **O. Grigorenko**. *Degree of Monotonicity in Aggregation Process*. Proceedings of WCCI 2010 IEEE World kongress on Computational Intelligence, pp. 1080–1087.
32. **O. Grigorenko**, J. Lebedinska. *On another view of aggregation of fuzzy relations*. Proceedings of Proceedings of the 7th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT-2011) and LFA-2011, 2011, pp. 21–27.
33. **O. Grigorenko**, J. Lebedinska, *A-T-aggregation of fuzzy relations*. Proceedings of 6th International Summer School on Aggregation Operators, 2011, pp. 203–208.
34. **O. Grigorenko**. *Involving fuzzy order in the definition of monotonicity for aggregation Function*. Proceedings of 10th International Conference on Applied Mathematics, 2011, pp. 547–556.
35. **O. Grigorenko**. *On the L-valued categories of L-E-ordered sets*. Kybernetika, 48(1): 2012, pp. 144–164.
36. **O. Grigorenko**. *Involving fuzzy orders for multi-objective linear programming*. Mathematical Modelling and Analysis, 17(3), 2012, pp. 366–380.
37. J. Gutierrez, T. Kubiak, **A. Šostak**. *Ideal valued topological structures*. Fuzzy Sets and Systems, vol. 161, 2010, pp. 2380–2388.
38. In Soo Kim, Sang-Eon Han and Alexander **Sostak**. *Generalization of a Khalimsky continuous map and a Khalimsky homeomorphism*. Mathematics. (iesniegts)

39. B. Pazar Varol, **A. Shostak**, H. Augun. *Categories related to topology viewed as soft sets*. Proceedings of EUSFLAT 2011, Aix-Les-Bains, France, 2011, pp. 883–890.
40. **S. Solovyov**. *Categorically-algebraic dualities*. Acta Univ. M. Belii, Ser. Math. **17** (2010), pp. 57–100.
41. **S. Solovyov**. *Categorically-algebraic frameworks for Priestley duality*. Contr. Gen. Alg. **19** (2010), pp. 187–208.
42. **S. Solovyov**. *From quantale algebroids to topological spaces: fixed- and variable-basis approaches*. Fuzzy Sets Syst. **161** (2010), no. 9, pp. 1270–1287.
43. **S. Solovyov**. *Hypergraph functor and attachment*. Fuzzy Sets Syst. **161** (2010), no. 22, pp. 2945–2961.
44. **S. Solovyov**. *On fuzzification of the notion of quantaloid*. Kybernetika **46** (2010), no. 6, pp. 1025–1048.
45. **S. Solovyov**. *On monadic quantale algebras: basic properties and representation theorems*. Discuss. Math., Gen. Algebra Appl. **30** (2010), no. 1, pp. 91–118.
46. **S. Solovyov**. *Variable-basis topological systems versus variable-basis topological spaces*. Soft Comput. **14** (2010), no. 10, pp. 1059–1068.
47. **S. Solovyov**. *Fuzzy algebras as a framework for fuzzy topology*. Fuzzy Sets Syst. **173** (2011), no. 1, pp. 81–99.
48. **S. Solovyov**. *Generalized fuzzy topology versus non-commutative topology*. Fuzzy Sets Syst. **173** (2011), no. 1, pp. 100–115.
49. **S. Solovyov**. *Localification of variable-basis topological systems*. Quaest. Math. **34** (2011), no. 1, pp. 11–33.
50. **S. Solovyov**. *A note on nuclei of quantale algebras*. Bull. Sect. Logic **40** (2011), no. 1/2, pp. 91–112.
51. **S. Solovyov**. *On a generalization of the concept of state property system*. Soft Comput. **15** (2011), no. 12, pp. 2467–2478.
52. **S. Solovyov**. *On algebraic and coalgebraic categories of variety-based topological systems*. Iran. J. Fuzzy Syst. **8** (2011), no. 5, pp. 13–30.
53. **S. Solovyov**. *On limits and colimits of variety-based topological systems*. Fuzzy Sets Syst. **178** (2011), no. 1, pp. 54–73.
54. **S. Solovyov**. *Powerset operator foundations for catalg fuzzy set theories*. Iran. J. Fuzzy Syst. **8** (2011), no. 2, pp. 1–46.
55. **S. Solovyov**. *Extended-order algebras as a generalization of posets*. Demonstratio Math. **44** (2011), no. 3, pp. 589–614.
56. **S. Solovyov**. *Categorical foundations of variety-based topology and topological systems*. Fuzzy Sets Syst. **192** (2012), pp. 176–200.
57. **S. Solovyov**. *On cartesian closed categories of modified weak extended-order algebras*. Contr. Gen. Alg. **20** (2012), pp. 85–100.
58. **S. Solovyov**. *Composite variety-based topological theories*. Fuzzy Sets Syst. **195** (2012), pp. 1–32.
59. **S. Solovyov**. *Sobriety and spatiality in categories of lattice-valued algebras*. Fuzzy Sets Syst. **204** (2012), pp. 1–26.
60. **S. Solovyov**. *Topological systems and Artin glueing*, Math. Slovaca **62** (2012), no. 4, pp. 647–688.

61. **S. Solovyov.** *Categorically-algebraic topology versus universal topology.* Fuzzy Sets Syst. (pieņemts publicēšanai)
62. **S. Solovyov.** *Categorically-algebraic topology and its applications.* Infom Sci. (iesniegts)
63. **S. Solovyov.** *Variable-basis categorically-algebraic dualities.* Quaest. Math. (iesniegts)
64. **S. Solovyov.** *Functorial semantics of topological theories.* Iran. J. Fuzzy Syst. (iesniegts)
65. **S. Solovyov.** *Quantale algebras as a generalization of lattice-valued frames.* Fuzzy Sets Syst. (iesniegts)
66. **S. Solovyov.** *Lattice-valued soft algebras.* Soft Comput. (iesniegts)
67. **S. Solovyov.** *Lattice-valued topological systems as a framework for lattice-valued Formal Concept Analysis.* Journal of Mathematics. (iesniegts)
68. **S. Solovyov.** *Many for the price of one duality principle for variety-based topological spaces.* Appl. Categ. Structures. (iesniegts)
69. **S. Solovyov.** *On a lax-algebraic characterization of closed maps.* Topology Appl. (iesniegts)
70. **S. Solovyov.** *On fuzzification of topological categories.* Fuzzy Sets Syst. (iesniegts)
71. **S. Solovyov.** *Categorically-algebraic dualities.* Acta Univ. M. Belii, Ser. Math. **17** (2010), pp. 57–100.
72. **S. Solovyov.** *Categorically-algebraic frameworks for Priestley duality.* Contr. Gen. Alg. **19** (2010), pp. 187–208.
73. **A. Šostaks.** *M-approximate systems – a unified approach to topology and theory of rough sets,* Proceedings of the 2010 International conference on topology and its applications, Nafpaktos, Greece, pp. 222–225.
74. **A. Šostaks.** *Towards the theory of M-approximate systems: fundamentals and examples.* Fuzzy Sets and Systems **161** (2010), pp. 2440–2461. (SCI izdevums)
75. **A. Šostaks.** *Towards the theory of approximate systems: variable range categories.* Proceedings of ICTA2011, Islamabad, Pakistan. Cambridge University Publ., 2012, pp. 265–284.
76. **A. Šostaks.** *M-approximate systems – a unified approach to fuzzy sets, fuzzy topology and rough sets.* Extended abstracts of ICTA2011 (International Conference on Topology and Applications), Islamabad, Pakistan, 2011, pp. 55–57.
77. **A. Šostaks.** *Variable-range approximate systems: a unified approach to categories of fuzzy topology and theories of fuzzy rough sets.* Proceeding Book of 1st International Conference Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Prishtina, Kosovo, 2012, pp 1–2.
78. **A. Šostaks, D. Čimoka.** *L-fuzzy syntopogenous structures. Part I: fundamentals and application to L-fuzzy topologies, L-fuzzy proximities and L-fuzzy uniformities.* The Special Volume of J. Fuzzy Sets and Systems. (iesniegts)
79. **B. Pazar Varol, A. Shostak, H. Augun,** *Categories related to topology viewed as soft sets,* Proceedings of EUSFLAT 2011, , Aix-Les-Bains, France, 2011, pp. 883-890.
80. **I. Uljane, A. Šostaks.** *On the category of L-valued bornological spaces.* Abstracts of the 16th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis MMA 2011, Sigulda, Latvia, 2011, p. 137.

81. **I. Uljane, A. Šostaks.** *On bornological type structures in the context of fuzzy sets.* Proceedings of the 2010 International Conference on Topology and its applications, Nafpaktos, Greece, 2010, pp. 226–229.
82. **I. Uljane, A. Šostaks.** *Towards the theory of L-fuzzy bornological spaces II: L-valued bornologies on powersets.* Fuzzy Sets and Systems (SCI). (iesniegts)
83. **I. Uljane.** *On bornological structures in context of fuzzy sets.* Abstracts of International Conference on Topology and the Related Fields, Nanjing, China, 2012, p. 42.
84. **I. Uljane, A. Šostaks.** *On L-valued bornologies on powersets.* The 2012 IBERO-American Conference on Topology and Its Applications Abstracts, Guanajuato, Mexico, 2012, pp. 43–44.
85. **I. Uljane, A. Šostaks.** *L-valued bornologies generated by fuzzy metrics.* The Eleventh International Conference on Fuzzy Sets Theory and Its Applications (FSTA 2012) Abstracts, Liptovsky Jan, Slovakia, 2012, p. 105.
86. **I. Uljane, A. Šostaks.** *On Many-valued Bornological Structures.* 15th International Conference Mathematical Modelling and Analysis Abstracts, Druskininkai, Lithuania, 2010, p. 106.
87. **I. Uljane.** *On concept of bornology in the context of many valued sets.* The Tenth International Conference on Fuzzy Sets Theory and Its Applications (FSTA 2010) Abstracts, Liptovsky Jan, Slovakia, 2010, p. 130.

## 5. Projekta izpildītāju dalība konferencēs un semināros (workshops)

Projekta gaitā veikto pētījumu rezultāti tika sistemātiski prezentēti projekta izpildītāju referātos starptautiskās un vietējās zinātniskās konferencēs un semināros, kā arī apspriesti ar kolēģiem no daudzām pasaules valstīm.

### Starptautiskās konferences un semināri:

#### 2010

10th International Conference *Fuzzy Sets Theory and its Applications* FSTA2010, Liptovsky Jan, Slovākijas Republika, 2010. gada 1. – 5. februārī ar referātiem piedalījās:

**S. Asmuss,** *On approximation under L-fuzzy information;*

**O. Grigorenko,** *Categorical aspects of aggregation of fuzzy relations;*

**S. Solovjovs,** *Composite Variety-Based Topological Theories;*

**A. Šostaks,** *M-approximative systems: some recent results and examples related to fuzzy topology and rough sets;*

**I. Uljane,** *On bornological type structures in the context of fuzzy sets.*

31st Linz Seminar on Fuzzy Set Theory, Linz, Austrijā, 2010. gada 9. – 13. februārī piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Powerset Operator Foundations for Categorically-Algebraic Fuzzy Set Theories*.

9th Workshop on General Algebra, Olomoucē, Čehijas Republikā, 2010. gada 12. – 14. februārī, piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Categorically-Algebraic Frameworks for Priestley Representation Theory*.

Conference on Applications of Algebra XIV, Zakopanē, Polijā, 2010. gada 8. – 14. martā piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Categorically-Algebraic Dualities*.

8th *Latvian Conference on Mathematics* (International), Valmierā, Latvijā, 2010. gada 9. - 10. aprīlī ar referātiem piedalījās:

**S. Asmuss:**

*On the error of approximation under L-fuzzy information;*

*On mixed interpolating – smoothing splines;*

*On construction of smoothing histosplines with boundary conditions;*

**O. Grigorenko**, *Dažas piezīmes par L-vērtīgām kategorijām;*

**A. Šostaks**, *M-aproksimatīvas sistēmas kā vienota pieeja nestriktām kopām, nestriktajai topoloģijai un raupjām kopām;*

**I. Uljane**, *Par bornoloģiskām struktūrām daudzvērtīgās kopās.*

15th International Conference *Mathematical Modelling and Analysis MMA2010*, Druskininkai, Lietuvā, 2010. gada 26. – 29. maijā ar referātiem piedalījās:

**S. Asmuss**, *An analysis of smoothing-interpolating problems;*

**O. Grigorenko**, *Involving fuzzy order in the definition of monotonicity for the aggregation process;*

**A. Šostaks**, *Recent Development of Different Branches of Theoretical and Applied Mathematics in the Context of Fuzzy Sets (invited talk);*

**I. Uljane**, *On Many-valued Bornological Structures.*

80th Workshop on General Algebra/Workshop on Non-Classical Algebraic Structures, Bedlewo, Polijā, 2010.gada 1. - 6. jūnijā piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Hypergraph Functor and Attachment*.

International Conference on Algebras and Lattices, Pragā, Čehijas Republikā, 2010. gada 21. - 25. jūnijā piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Categorically-Algebraic Topology*.

2010 International Conference on Topology and its Applications, Nafpaktos, Grieķijā 2010. gada 26. - 30. jūnijā ar referātiem piedalījās:

**A. Šostaks**, *M-aproximative systems – a unified approach to topology and theory of rough sets;*

**I. Uljane**, *On bornological type structures in the context of fuzzy sets. On Many-valued Bornological Structures.*

WCCI 2010 (World kongress on Computational Intelligence 2010) Barselonā, Spānijā, 2010. gada 18. – 23. jūlijā **O. Grigorenko** piedalījās ar referātu *Degree of monotonicity in aggregation process.*

Summer School on General Algebra and Ordered Sets 2010, Malenovicē, Čehijas Republikā, 2010. gada 4. - 10. septembrī piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Categorically-Algebraic Dualities in Progress.*

Workshop on Lattices, Relations and Kleene Algebras, University College London, Londonā, Lielbritānijā, 2010. gada 21. – 23. septembrī piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *On Homomorphisms of Extended-Order Algebras.*

Research Seminar on Category Theory, , Faculty of Mathematics, Informatics, and Mechanics, University of Warsaw, Varšavā, Polijā, 2010. gada 15. oktobrī piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Categorically-Algebraic Topology: Theory and Applications.*

91st Peripatetic Seminar on Sheaves and Logic (PSSL 91), University of Amsterdam Library, Amsterdamā, Nīderlandē, 2010.gada 27. – 28. novembrī piedalījās **S. Solovjovs** ar stenda referātu *Lattice-Valued Categorically-Algebraic Topology.*

## 2011

32nd Linz Seminar on Fuzzy Set Theory, Linzā, Austrijā 2011. gada 1. - 5. februārī piedalījās **S.Solovjovs** ar referātu *Variable-Basis Categorically-Algebraic Dualities.*

81st Workshop on General Algebra Linzā, Austrijā 2011. gada 3. - 6. februārī piedalījās **S.Solovjovs** ar referātu *Dual Attachment Pairs in Categorically-Algebraic Topology.*

10th International Conference APLIMAT 2011, Bratislavā, Slovākijā, 2011. gada 1.-4. februārī piedalījās **O. Grigorenko** ar referātu *Involving fuzzy order in the definition of monotonicity for aggregation function.*

Applications of Algebra XV, Zakopanē, Polijā, 2011. gada 7. – 13. martā piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Functorial Semantics of Topological Theories.*

92nd Peripatetic Seminar on Sheaves and Logic (PSSL 92), University of Oxford, Oksfordā, Lielbritānijā, 2011. gada 23. -24. aprīlī piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Categorically-Algebraic Topological Theories.*

Workshop "Algebra and its Applications" Sventē, Latvijā, 2011. gadā no 29. aprīļa līdz 1. maijam piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *On Some Properties of the Category of Extended-Order Algebras.*

16th International Conference *Mathematical Modelling and Analysis* MMA2011, Siguldā, Latvijā, 2011. gada 25. - 28. maijā ar referātiem piedalījās:

**S. Asmuss:**

*An analysis of approximation on an L-fuzzy set based on L-fuzzy valued integra;  
On smoothing problems with additional restrictions;*

**D. Dance**, *On concepts of the solution for matrix games with fuzzy payoffs;*

**O. Grigorenko**, *Involving fuzzy orders for multi-objective linear programming;*

**A. Šostaks**, *Soft Neighborhood Sets;*

**I. Uljane**, *On the category of L-valued bornological spaces.*

The Second International Conference on Order, Algebra, and Logics, Krakovā, Polijā, 2011. gadā 6. - 10. jūnijā piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Algebraically-Topological Systems*.

International Conference on Semigroups, General Algebra, and Applications/82nd Workshop on General Algebra/26th Conference for Young Algebraists, Potsdamā, Vācijā, 2011. gada 24. – 26. jūnijā piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Algebraically-Topological Systems and Attachment*.

International Conference on Topology and Applications ICTA2011, Islamabadā, Pakistānā 2011. gada 4. – 10. jūlijā piedalījās **A. Šostaks** ar referātu *M-approximate systems – a unified approach to fuzzy sets, fuzzy topology and rough sets*.

6th International Summer School on Aggregation Operators, AGOP 2011, Benevento, Itālijā, 2011. gada 11. - 15. jūlijā ar referātiem piedalījās

**S. Asmuss**, *On an L-fuzzy valued norm defined by an L-fuzzy valued integral;*

**O. Grigorenko**, *A-T-aggregation of fuzzy relations;*

Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology EUSFLAT-LFA 2011, Aix-les-Bains, Francijā, 2011. gada 18. - 22. jūlijā ar referātiem piedalījās

**S. Asmuss**, *L-fuzzy valued measure and integral;*

**O. Grigorenko**, *On another view of aggregation of fuzzy relations;*

**A. Šostaks**, *Categories related to topology viewed as soft sets.*

Topology, Algebra, and Categories in Logic (TACL 2011), Marseilles, Francijā, 2011. gada 26. – 30. jūlijā piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Topological Categories versus Categorically-Algebraic Topology*.

Summer School on General Algebra and Ordered Sets 2011, Svratkā, Čehijas Republikā, 2011.gada 3. – 9. septembrī piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Quantale Algebras as a Generalization of Lattice-Valued Frames*.

## 2012

11th International Conference *Fuzzy Sets Theory and its Applications FSTA2012*, Liptovsky Jan, Slovākijas Republika, 2012. gada no 30. janvāra 3. februārim ar referātiem piedalījās:

**S. Asmuss:**

*On estimation of approximation error on fuzzy sets by means of fuzzy valued integral;*

*On spline methods of approximation under L-fuzzy information;*

**D. Dance,** *On multi-objective linear programming approach for solving fuzzy matrix games;*

**O. Grigorenko,** *Fuzzy Orders for Solving MOLP Problems;*

**A. Šostaks,** *On L-fuzzy syntopogeneous structures;*

**I. Uljane;** *L-valued bornologies generated by fuzzy metrics.*

33rd Linz Seminar on Fuzzy Set Theory: Enriched Category Theory and Related Topics, Linzā, Austrijā, 2012. gada 14. - 18. februārī piedalījās **A. Šostaks** ar referātu *Variable range categories of approximate systems*.

9th *Latvian Conference on Mathematics* (International), Jelgavā, Latvijā, 2012. gada 30. - 31. martā ar referātiem piedalījās:

**S. Asmuss:**

*Funkciju aproksimācijas kļūda nestriktās kopās un tās novērtējums, lietojot nestrikti vērtīgu integrāli;*

*Par vispārināto faktoragregācijas operatoru;*

**O. Grigorenko,** *Nestriktu sakārtojumu lietojumi;*

**A. Šostaks:**

*Par nestriktām sintopogēnām struktūrām nestriktu kopu eksponentēs;*

*Par raupjām kopām, kuras inducē monoidālu operatoru pāris;*

**I. Uljane,** *L - vērtīgas bornoloģijas nestriktā metriskā telpā.*

2012 Ibero-American Conference on Topology and Its Applications, Guanojuato, Meksikā, 2012. gada 10. – 14. aprīlī piedalījās ar referātiem:



**A. Šostaks**, *M-approximate systems: a unified approach to categories of fuzzy topology and theories of fuzzy rough sets;*

**I. Uljane**, *On L-valued bornologies on powersets.*

17th International Conference *Mathematical Modelling and Analysis MMA2012*, Tallinnā, Igaunijā, 2012. gada 6. - 8. jūnijā ar referātiem piedalījās:

**S. Asmuss**, *On some generalization of smoothing problems;*

**O. Grigorenko**, *On fuzzy orders for solving MOLP problems.*

IV Workshop on Coverings, Selections and Games in Topology, Casertā, Itālijā, 2012. gada 25. - 30. jūnijā piedalījās **A. Šostaks** ar referātu *On a class of Namioka spaces determined by a topological game* (līdzautors A. Szymanski, Slippery Rock university, Slippery Rock, USA).

25th European Conference on Operational Research, Viļņā, Lietuvā, 2012. gada 8. - 11. jūlijā piedalījās referātiem:

**S. Asmuss**, *Error based decision making on approximation methods under fuzziness;*

**O. Grigorenko**, *Involving fuzzy orders for multi-objective linear programming.*

Workshop on Category Theory in honour of George Janelidze, on the occasion of his 60th birthday, Coimbra, Portugālē, 2012. gada 9. – 13. jūlijā piedalījās **S. Solovjovs** ar referātu *Many for the Price of One Duality Principle for Variety-Based Topological Spaces.*

International Student Conference on *Applied Mathematics and Informatics ISCAMI2012*, Malenovicē, Čehijas Republikā, 2012. gada 10. - 13. maijā, piedalījās **D. Dance** ar referātu *On multi-level programming approach for solving matrix games with fuzzy pay-offs.*

2012 International Conference of the Honam Mathematical Society, Jeju pilsētā, Dienvidkorejā, 2012. gada 15. -17. jūnijā **A. Šostaks** piedalījās ar referātu „M-approximate systems - a unified approach to fuzzy sets, fuzzy topology and rough sets” (**invited talk**).

1st International Euroasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2012), Priština, Kosovā, 2012. gada 3. - 7. septembrī piedalījās **A. Šostaks** ar referātu *Variable-base approximate systems: a unified approach to categories of fuzzy topology and theories of fuzzy rough sets* (**invited talk**).

Workshop on Fuzzy Topology at the International Education Communication Center of Beijing Institute of Technology, Pekinā, Kīnā 2012. gada 19. – 20. septembrī ar referātiem piedalījās:

**A. Šostaks**, *Recent development in the theory of variable-base approximate systems (invited talk);*

**I. Uljane**, *Recent development in the theory of L-valued bornological spaces (invited talk).*

International Conference on Topology and the Related Fields, Nanjing, Jiangsu provincē, Ķīnā 2012. gada 22. - 25. septembrī ar referātiem piedalījās:

**A. Šostaks**, *M-approximate systems - a unified approach to fuzzy sets, fuzzy topology and rough sets;*

**I. Uljane**, *On bornological structures in context on fuzzy sets.*

### LU zinātniskās konferences

#### 68. konferencē (2010) ar referātiem piedalījās:

**O. Grigorenko**, *Nestriktā sakārtojuma iesaistīšana monotonitātes definīcijā;*

**I. Uljane**, *Daudzvērtīgas bornoloģiskas telpas.*

#### 69. konferencē (2011) ar referātiem piedalījās:

**O. Grigorenko**, *Nestriktu sakārtojumu agregācijas;*

**D. Dance**, *Nestriktu norēķinu matricu spēļu analīze.*

### 6.3. Regulārais seminārs

Projekta izpildes gaitā radušās problēmas, kā arī iegūtie rezultāti tika regulāri apspriesti sistemātiski funkcionējošā zinātniskā seminārā, sk. semināra mājās lapu [www.mathematics.lv/asw](http://www.mathematics.lv/asw)

## Pētījuma apakšaktivitāte

### 4.6.2. Efektīvu plūsmas šifru un kriptogrāfiski noturīgu pseidogadījuma skaitļu ģeneratoru konstrukcija

*Aktivitātes vadītājs: profesors Jānis Buls*









































































