EIROPAS SOCIĀLAIS FONDS

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

EIROPAS SAVIENĪBA

Projekta
„Atomāro un nepārtrauktās vides tehnoloģisko fizikālo procesu modelēšana, matemātisko metožu pilnveide un kvalitatīvā izpēte”
Nr.2009/0223/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/008

Tehniskā atskaite aktivitātē

4.5. Pētījumu izvēršana matemātikas lietojumiem nozīmīgos diferenču vienādojumos

Apstiprinu:	**Apstiprinu:**
Projekta padomes priekšsēdētājs:	**LU Zinātņu prorektors:**
__________________Jānis Mencis	**______________Indriķis Muižnieks**

Pētījuma apakšaktivitāte

4.5. Pētījumu izvēršana matemātikas lietojumiem nozīmīgos diferenču vienādojumos

Aktivitātes vadītājs: profesors Andrejs Reinfelds

Apakšaktivitātes pētnieku grupas sastāvs

Grupas vadītājs vadošā pētnieka p.i. Andrejs Reinfelds. Pētījuma izpildes gaitā tajā dalību kā atbilstoša amata pienākuma izpildītāji ņēma vadošais pētnieks Jānis Cepītis, vadošais pētnieks Uldis Strautiņš, pētniece Maruta .Avotiņa, pētniece Sandra .Blomkalna, laborants Juris Čerņonoks.

Uldis Strautiņš pētījumā iesaistījās 2010.gada oktobrī, atgriežoties Latvijā no Kaizerslauternas (Vācijā) Fraunhofera sistēmas Tehnomatemātikas un saimnieciskās matemātikas institūta kā doktora kvalifikāciju ieguvis zinātnieks un pamatā pievērsās suspensiju šķiedru reoloģijai. Sākuma posmā šajā projekta apakšaktivitātē kā laborants strādāja Juris Čerņenoks. Viņš veica skaitliskos aprēķinus, piedalījās semināros un tajos dzirdētā rezultātā uzrakstīja un aizstāvēja bakalaura darbu. Diemžēl, iestājoties maģistratūrā, viņa zinātniskās intereses mainījās un viņš pārgāja uz apakšaktivitātes 4.7. pētnieku grupu, apmainoties ar Marutu Avotiņu, kuras darbība pilnā mērā atbilda apakšaktivitātes 4.5. problemātikai. Sandas Blomkalnas darbība projektā pamatā saistīta ar apakšaktivitāti 4.4.1, bet 2011.gada rudenī viņa iestājās doktorantūrā Jāņa Cepīša vadībā.

Apakšaktivitātes vadošajiem izpildītājiem ir starptautiski labi pazīstamas iestrādes diferenciālvienādojumu kvalitatīvās teorijas dažādos aspektos, kā arī diferenciālvienādojumu lietojumos praktiskās jomās.

Projekta apakšaktivitātes mērķi un uzdevumi

Kā nozīmīgākais pētījumu mērķis atzīmējams jaunu pietiekamo nosacījumu atrašana, lai diferenču vienādojumu sistēmas invariantas varietātes apkārtnē kā galīgas dimensijas, tā Banaha telpā būtu ekvivalentas. Tas nodrošina lietojumos piedāvāto diferenču vienādojumu sistēmu, kā arī nepārtraukto un diskrēto dinamisko sistēmu, ieskaitot „time scale" sistēmu kvalitatīvu un kvantitatīvu izpēti.

.Tika paredzēts izvērst pētījumus dažāda tipa, tai skaitā trihotomiska tipa diferenču vienādojumu vienkāršošana un linearizēšanā invariantas varietātes apkārtnē kā galīgas dimensijas, tā Banaha telpā, izmantojot Grīna tipa attēlojumus. Pie šāda tipa diferenču vienādojumiem noved vienā virzienā turpināmu evolūcijas tipa parciālie diferenciālvienādojumi, kurus plaši izmanto fizikālo procesu modelēšana. Plaši tiks izlietots tēmas vadītāja izstrādātais redukcijas princips. Tika plānots attīstīt arī atrisinājumu stabilitātes teoriju un dinamisko sistēmu ekvivalences teoriju tā sauktajā „time scale" aspektā, kura sintezē kā diferenciālvienādojumu, tā diferenču vienādojumu teoriju. Pavērās arī nozīmīga iespēja pārnest Rīgas diferenciālvienādojumu nelineāro robežproblēmu skolas sasniegumus diferenču vienādojumu problemātikai. Pievēršanās diferenču vienādojumu problemātikai ir īpaši nozīmīga perspektīvajiem jaunajiem zinātniekiem zinātnisko pētījumu tematikas izvēlē.

Konferences un semināri

Pateicoties apakšaktivitātes vadītāja starptautiskajai autoritātei Starptautiskā diferenču vienādojumu biedrība (ISDE) (pāri par 600 biedriem visā pasaulē) uzticēja 2010.gada vasarā (19. – 23. jūlijā) Rīgā organizēt šīs biedrības 16.konferenci „Diferenču vienādojumi un to lietojumi" (ICDEA- 2010). Konferences organizācijas komitejas priekšsēdētājs bija

A.Reinfelds. Tajā ar ziņojumiem piedalījās projekta dalībnieki A.Reinfelds, J.Cepītis un H.Kalis (kopīgi ar A.Gedroicu). Arī J.Čerņenoks aktīvi piedalījās konferences un tās organizācijas darbā, noklausoties kopīgi ar pārējiem projekta darba grupas dalībniekiem daudzu pētījuma tēmā vadošo pasaules matemātiķu ziņojumus plenārajās un sekciju sēdēs (S.Elaydi, J.M.Cushing, J.Hofbauer, S.Hilger, J.Mawhin,C.R. Devaney, u.c.).

Projekta izpildes sākumposmā tika rīkoti divu sēriju darba semināri. Par žirotrona problēmu jau bijām sākuši interesēties ES EURATOM programmas projekta „Study of mathematical aspects of gyrotron theory" (2001-2006) ietvaros modelējot elektronu kustību žirotronā, kas nozīmīgi pētījumiem par kontrolētu termonukleāro reakciju un būvējot jauna tipa atomreaktorus. Šīs sērijas semināriem piesaistījām arī H.Kali. Rezultātā, turpinot pētījumus, ieguvām jaunus rezultātus, kā arī veicām agrāk iegūto atziņu apkopojumu un vispārinajumus (sk detalizēto pētījumu izklāsta 5.nodaļu). Viens no nozīmīgākajiem diferenču vienādojumu un diferenciālvienādojumu teorijas attīstības virzieniem 20. un 21.gs. mijā ir vienādojumu „laika skalās" teorijas izveidošana. Tās pamatlicēji ir Vācijas un ASV matemātiķi S.Hilgers, M.Bohners, A.Petersons. u.c. Tādēļ viens no nozīmīgākajiem punkta 4.5. darba virzieniem ir šajā virzienā iegūto rezultātu apgūšana ar mērķi tos pilnveidot un iegūt jaunus rezultātus. Pārskata periodā reizi nedēļā notika darbsemināri, kuros, sekojot monogrāfijai M.Bohner, A.Peterson „Dynamic Equations on Time Scale" (Birkhauser) tika apgūti diferenciālrēķini un integrālrēķini, balstoties uz Hilgera atvasinājuma jēdzienu, kā arī diferenciālvienādojumu „laika skalās" teorijas pamati. Šis darbs kalpoja, lai sagatavotos dažādu diferenciālvienādojumu kvalitatīvās teorijas rezultātu analogu iegūšanai diferenču un „laika skalas" vienādojumiem. J.Čerņenoks paralēli iepazinās ar stabilitātes teorijas pamatjēdzieniem, un centra varietāšu teoriju, galveno tās rezultātu (centra varietātes eksistence, redukcijas princips, aproksimācija centra varietātēm, centra varietāšu īpašības) jauniem vienkāršotiem pierādījumiem. Uz šīs bāzes tika izstrādāts bakalaura darbs.

Projekta izpildes laikā apakšaktivitātes darba grupa regulāri apmeklēja arī LU doktorantūras skolas „Atomāro un nepārtrauktās vides fizikālo procesu pētīšanas, modelēšanas un matemātisko metožu pilnveidošanas skola" virziena „Tehnomatemātikas aktuālās problēmas" semināri, kuru laikā apspriestas un analizētas dažādas tēmas un raksti par diferenču vienādojumu izturēšanos. Sadarbībā ar projekta kolēģi U.Strautiņu notikuši divi semināri par reoloģijas problēmām – „Plūsmas orientētu šķiedru orientācija suspensijās" un „Šķiedru suspensijas modelēšana", kuri izraisījuši arī lielu interesi projekta dalībniekos fiziķos. Šajā kontekstā ziņojumu „Laika soļa izvēle daļiņu modelēšanā", sniedzis S.Lācis. Šai problemātikai piekļaujas arī semināros sniegtie un analizētie ziņojumi: H.Kalis „Ferromagnetisko daļiņu modelēšana" un A.Cēbers „Magnētiska dipola modelēšana". M.Avotiņa šīs sērijas semināros stāstījusi par elementārās matemātikas metodēm (vienādojumi, nevienādības, novērtējumi), kuras izmanto pierādījumos par diferenču vienādojumu izturēšanos, kā arī par diferenču vienādojumu uzdevumiem dažāda līmeņa matemātikas olimpiādēs. Kokrūpniecības tehnoloģisko procesu matemātiskās modelēšanas kontekstam veltīti divi semināri. Seminārā „Koksnes dedzināšanas modelēšana" ziņojumu snieguši LLU speciālisti A.Āboltiņš un A.Morozovs. Savukārt RTU maģistrants J.Šliseris sniedzis ziņojumu „Līmētu kompozītu (koksnes) lokšņu deformāciju- spriegumu analīze pie dažādām iedarbēm".

2012. gada jūnijā tika rīkots Ročesteras Tehnoloģiskā institūta (ASV) profesora Mihaela Radina zinātniskais seminārs „Boundedness, Periodic and Monotonic Character of Positive Solutions of a Family of Non-Autonomous Difference Equations" un noklausīts lekciju cikls „Introduction to Difference Equations" par diferenču vienādojumu izpēti.

J.Cepītis referējis 11. starptautiskajā konferencē „Teaching mathematics: retrospective and perspectives", 6.-7. maijs, 2010, Daugavpils, Latvija, kur cita starpā aplūkots jautājums par nepieciešamajām izmaiņām matemātikas bakalaura un maģistra studiju programmās projekta ietvaros realizējamās apakšaktivitātes 4.5. kontekstā.

Detalizēts pētījumu izklāsts

1. Pētījumi par diferenču vienādojumiem un ar tiem saistītām dinamiskām sistēmām.

Sakarā ar perspektīviem lietojumiem aktuāli kļuvuši diferenču vienādojumu pētījumi. Balstoties uz starptautiski atzītām iestrādēm diferenciālvienādojumu kvalitatīvās teorijas dažādos aspektos, projektā kā mērķis izvirzīts atrast jaunus pietiekamos nosacījumus, lai diferenču vienādojumu sistēmas invariantas varietātes apkārtnē kā galīgas dimensijas, tā Banaha telpā būtu ekvivalentas, attīstīt diferenču un ar tiem saistīto dinamisko sistēmu atrisinājumu stabilitātes teoriju un dinamisko sistēmu ekvivalences teoriju, kā arī kvalitatīvi un kvantitatīvi dažādos aspektos pētīt nepārtrauktās un diskrētas dinamiskas sistēmas ieskaitot „laika skalas” („time scale”) sistēmas, kuras vienotā teorijā apvieno diferenciālvienādojumus un diferenču vienādojumus.

Stabilitātes teorijas un redukcijas principa saistības aktualitāti aplūkoti darbos [10,12] un referātos konferencēs Valmierā (2012) un Drezdenē (Vācija) (2010). Ja aplūkojamās sistēmas galvenā daļa ir lineāra un atbilstošās matricas īpašvērtību reālās daļas nav pozitīvas, bet nelineārā daļa apmierina Lipšica nosacījumus ar pietiekoši mazu Lipšica konstanti, tad triviālā atrisinājuma stabilitātes izpēte reducējās uz zemākas dimensijas analogu sistēmu, kuras lineārās daļas matricas īpašvērtību reālās daļas ir vienādas ar nulli, bet nelineārās daļas apmierina Lipšica nosacījumus ar mazu Lipšica konstanti. Lai to pierādītu vispirms pierāda tā sauktās centra varietātes eksistences teorēmu. Lai pierādītu šo apgalvojumu izlietojam atrisinājuma integrālo reprezentāciju, tā saukto konstantu variācijas formulu vispārinājumu. Tālāk pieradām, ka katrs izejas sistēmas atrisinājums tiecās uz vienu konkrētu atrisinājumu uz centra varietātes, tā saukto asimptotiskās fāzes tipa teorēmu. Arī šajā pierādījumā izlietojām funkcionālanalīzes metodes un specifiskas novērtējumu metodes. Pie reizes jāatzīmē, ka centra tipa varietāti un asimptotiskās fāzes īpašību var pierādīt pie vispārīgākiem nosacījumiem, tā sauktiem seperācijas nosacījumiem, kurus detalizēti aplūkoja dotajos referātos. Balstoties uz iepriekšminētām teorēmām var pierādīt redukcijas principu stabilitātes teorijā, izejas sistēmas triviālais atrisinājums ir stabils, asimptotiski stabils un nestabils Ļapunova nozīmē tad un tikai tad kad reducētā vienādojuma triviālais atrisinājums ir stabils, asimptotiski stabils vai nestabils Ļapunova nozīmē. Tālāk aplūkojam vispārīgāku gadījumu, t.i. kad sistēmas galvenās daļas ir būtiski nelineāras tā saukto Florio-Seiberta problēmu, īpašu uzmanību pievēršot vienādojumiem ar homogēnu galveno daļu, Pie pietiekoši vispārīgiem nosacījumiem pierāda slēgtas, asimptotiski stabilas invariantas kopas (atraktora) eksistenci izlietojot globālās Ļapunova-Krasovska funkcijas. Pie reizes jāatzīmē, ka invarianta kopa ne vienmēr ir invarianta varietāte. Atrasti pietiekamie nosacījumiem izmantojot Ļapunova-Krasovska funkcijas pie kuriem invarianta kopa ir arī Lipšica varietāte. Tālāk atrodam arī citus pietiekamos nosacījumus invariantās varietātes eksistencei. Tiek aplūkota viena parametra savstarpēji komutējošu operatoru saime. Izrādās, ka šai saimei var pierādīt kopīga nekustīga punkta eksistenci. Pierādījums ir oriģināls un balstās uz Šaudera-Lerjē teorēmas principiem. Vispārīgā gadījumā neizpildās asimptotiskās fāzes īpašība pat vienādojumiem ar homogēnu galveno daļu. Tas tiek ilustrēts ar konkrētu piemēru. Tiek atrasti pietiekamie nosacījumi, kad būtiski nelineāras sistēmas triviālā atrisinājuma stabilitātes izpēte ir ekvivalenta reducētās sistēmas triviālā atrisinājuma eksistencei.

Darbos [16,19,22,24] un referātos konferencēs Arielā (Izraela) (2010), Maskavā (Petrovska seminārs) (2011), Loughboroughā (Lielbritānija, EQUADIFF) (2011) un Batumi (Grūzija) (2011) pētītas tā sauktās impulsīvās dinamiskās sistēmas vispārīgā funkcionālā Banaha telpā, tai skaitā jautājums par Lipšica gludas invariantas varietātes eksistenci, par atrisinājumu asimptotisko fāzi un atrisinājumu eksponenciālo tiekšanos uz stabilo invarianto varietāti, kā arī redukcijas principi kā stabilitātes teorijā, tā dinamiskās ekvivalences teorijā. Atzīmējam, ka impulsīvo dinamisko sistēmu raksturīga īpašība ir, ka tās bieži ir neapgriežamas. Tātad aplūkojam vispārīgi impulsīvo dinamisko sistēmu Banaha telpā, atdalot lineāro un nelineāro daļu., kā arī izdalot dinamisko sistēmu un lēcienu nosacījumus

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x,y),$$

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + g(t,x,y),$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i+0) - x(\tau_i-0) = C_i x(\tau_i-0) + p_i(x(\tau_i-0, y(\tau_i-0)),$$

$$\Delta y|_{t=\tau_i} = y(\tau_i+0) - y(\tau_i-0) = D_i y(\tau_i-0) + q_i(x(\tau_i-0, y(\tau_i-0)) \; .$$

Pieņemot, ka lineārās daļas evolūcijas operators apmierina integrālos seperācijas nosacījumus un nelineārie locekļi apmierina Lipšica nosacījumus ar mazu konstanti, pierāda Lipšica seperācijas varietātes eksistenci. Tālāk pierāda, ka atrisinājumi apmierina zināma tipa integrālās nevienādības. Balstoties uz iegūtajiem rezultātiem un apskatot speciāla tipa funkcionālo integrālvienādojumu, pierāda asimptotiskās fāzes īpašību. Tas viss ļauj formulēt un pierādīt redukcijas principa integrālo versiju. Impulsīvas sistēmas triviālais atrisinājums ir integrāli stabils, integrāli asimptotiski stabils vai integrāli nestabils tad un tikai tad ja reducētās impulsīvas sistēmas

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x,u(t,x)),$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i+0) - x(\tau_i-0) = C_i x(\tau_i-0) + p_i(x(\tau_i-0), u(\tau_i-0, x(\tau_i-0))),$$

triviālais atrisinājums ir integrāli stabils, integrāli asimptotiski stabils vai integrāli nestabils. Gadījumā, ja invariantā varietāte ir eksponenciāli asimptotiski stabila, tad ir pareizs precīzāks rezultāts, konkrēti triviālais atrisinājums ir stabils, asimptotiski stabils vai nestabils kā izejas dinamiskai sistēmai, tā reducētai dinamiskai sistēmai.

Tiek izvērsti pētījumi dažāda tipa, tai skaitā trihotomiska tipa apgriežamu impulsīvo dinamisko sistēmu vienkāršošanā un linearizēšanā stacionārā punkta apkārtnē kā galīgas dimensijas, tā Banaha telpā, izmantojot Grīna tipa attēlojumus, darbi [21,23] un referātos konferencēs Ponta Delgada (Portugāle) (2011), Tbilisi (Grūzija) (2011). Tiek atrasti pietiekamie nosacījumi, lai impulsīvās dinamiskās sistēmas

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x,y,z),$$

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + g(t,x,y,z),$$

$$\frac{dz}{dt} = C(t)z + h(t,x,y,z),$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0) = E_i x(\tau_i - 0) + p_i(x(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0), z(\tau_i - 0)),$$

$$\Delta y|_{t=\tau_i} = y(\tau_i + 0) - y(\tau_i - 0) = F_i y(\tau_i - 0) + q_i(x(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0), z(\tau_i - 0)) \ ,$$

$$\Delta z|_{t=\tau_i} = z(\tau_i + 0) - z(\tau_i - 0) = G_i z(\tau_i - 0) + r_i(x(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0), z(\tau_i - 0))$$

un daļēji linearizētā impulsīvā dinamiskā sistēma

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y + g(t, u(t,y), y, v(t,y,)),$$

$$\frac{dz}{dt} = C(t)z$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = E_i x(\tau_i - 0) \ ,$$

$$\Delta y|_{t=\tau_i} = F_i y(\tau_i - 0) + q_i(u(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0)),\ y(\tau_i - 0), v(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0)))$$

$$\Delta z|_{t=\tau_i} = z(\tau_i + 0) - z(\tau_i - 0) = G_i z(\tau_i - 0)$$

būtu lokāli un arī globāli dinamiski ekvivalentas. Pie šāda tipa diferenču vienādojumiem noved evolūcijas tipa parciālie diferenciālvienādojumi, kurus plaši izmanto fizikālo procesu modelēšanā. Lai atrastu pietiekamos nosacījumus impulsīvo dinamisko sistēmu dinamiskai ekvivalencei pieņem, ka lineārās daļas evolūcijas operators apmierina integrālos seperācijas nosacījumus un nelineārie locekļi apmierina Lipšica nosacījumus ar mazu konstanti.

Darbos [3,15,34] un referātos Rīgā (2010) un Barselonā (2012) aplūkota Banaha telpā $X \times E$ neapgriežamu diferenču vienādojumu sistēma autonomā

$$x(t+1) = g(x(t)) + G(x(t),\ p(t)),$$

$$p(t+1) = A(x(t))\,p(t) + \Phi(x(t),\ p(t)).$$

un neautonomā gadījumā Šādas sistēmas rodas invariantas varietātes apkārtnē. Atzīmējam, ka divas diferenču vienādojumu sistēmas ir ekvivalentas ja eksistē tāds homeomorfisms (savstarpēji nepārtraukts un bijektīvs attēlojums), kas vienas diferenču sistēmas orbitas attēlo par otras diferenču sistēmas orbitām un otrādi. Dotā pieeja ļauj sarežģītas diferenču vienādojumu sistēmas kvalitatīvo izpēti aizvietot ar vienkāršākas diferenču vienādojumu sistēmas, bieži ar mazāku dimensiju, izpēti. Dažādi reālās prakses problēmas noved gan pie apgriežamiem, gan pie neapgriežamiem diferenču vienādojumu sistēmām, pie kam pēdējās no matemātiskā viedokļa ir sarežģītākas un reizē arī interesantākas. Tika pētīta vienkāršākā neapgriežama diferenču vienādojumu sistēma, t.i. tāda, kuras lineārais tuvinājums ir asimptotiski stabils. Tika atrasti pietiekamie nosacījumi, izlietojot diferenču sistēmas labās puses nosacījumus, kad dotai sistēmai eksistē invarianta Lipšica gluda varietāte $p=u(x)$– centra varietāte pie pietiekami mazām perturbācijām. Pierādījumā tika izmantotas nekustīgā punkta eksistences teorēmas attiecīgi izvēlētā funkcionālā telpā. Tālāk balstoties uz šo rezultātu tika atrasti pietiekamie (tuvu nepieciešamajiem nosacījumiem), lai dotā diferenču vienādojumu sistēmu būtu ekvivalenta vienkāršotai sistēmai.

$$x(t+1) = g(x(t)) + G(x(t), u(x(t))),$$
$$p(t+1) = A(x(t))\, p(t).$$

Vispirms atzīmējam, ka iegūtas diferenču sistēmas pirmā apakšsistēma nesatur mainīgo p, kamēr otrā apakšsistēma ir lineāra pret p. Pierādījums ir pietiekoši gars un balstās uz veselu teorēmu sēriju. Veiksmīgi izvēloties vajadzīgos palīga funkcionālos vienādojumus, bieži ievedot arī papildus mainīgos, kā arī atrodot piemērotas funkcionālās telpas tika pierādīta atbilstoša homeomorfisma eksistence. Iegūtais rezultāts būtiski vispārina pasaules matemātiskā literatūrā agrāk iegūtos rezultātus. Par doto referātu tiek gatavota izvērsta publikācija.

Iegūtie rezultāti ir apkopoti publikācijā „Conjugacy of discrete semidynamical systems in the neighbourhood of invariant manifold” [3], kura pieņemta publicēšanai „Springer Proceedings in Mathematics”.

2. Pētījumi par racionāliem diferenču vienādojumiem.

Pārskata periodā veikti pētījumi par otrās kārtas racionāliem diferenču vienādojumiem, kuri vispārīgā veidā ir uzrakstāmi formā:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + Cx_{n-1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

kur parametri $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C$ ir nenegatīvi reāli skaitļi un sākuma nosacījumi x_{-1} un x_0 ir patvaļīgi nenegatīvi reāli skaitļi tādi, ka $A + Bx_n + Cx_{n-1} > 0$ visām naturālām n vērtībām.

Nozīmīgākā grāmata par šāda veida vienādojumiem ir *Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with open problems and conjectures* (M.R.S. Kulenovic, G.Ladas, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Fla, USA, 2002). Tā tika izmantota, lai uzzinātu nozīmīgākos jau zināmos faktus par diferenču vienādojumu (1) izturēšanos (piemēram, lokālā un globālā stabilitāte, periodiskie atrisinājumi un to eksistence, atrisinājumu konverģence) un iepazītos ar galvenajām metodēm, kuras izmanto diferenču vienādojumu kvalitatīvajā izpētē (matemātiskās analīzes metodes – atrisinājumu konverģence, nepārtrauktība, matemātiskās loģikas metodes – spriedumu, hipotēžu formulēšana, diferenču vienādojumu teorijas metodes – atrisinājumu stabilitātes pierādījumi vai konstatējums par nestabilitāti, ciklu meklēšana, skaitliskajām metodēm – hipotēžu izvirzīšana, pamatojoties uz skaitliskajiem eksperimentiem MS EXEL vai MATHCAD).

Iepriekšminētajā grāmatā dotas vairākas neatrisinātas problēmas un pieņēmumi, galvenā uzmanība tika pievērsta neatrisinātajai problēmai:

Zināms, ka katrs pozitīvs diferenču vienādojumu:

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_{n-1}}{1 + x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2x_{n-1}}{1 + x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

atrisinājums konverģē uz periodisku atrisinājumu ar periodu 2*:* $\ldots, \psi, \varphi, \psi, \varphi, \ldots$.

Izteikt ψ *un* φ *izmantojot sākuma nosacījumus* x_{-1} *un* x_0*. Un otrādi, ja* $\ldots, \psi, \varphi, \psi, \varphi, \ldots$ *ir diferenču vienādojumu (2), (3) un (4) atrisinājums ar periodu* 2*, noteikt visus sākuma nosacījumus* $(x_{-1}, x_0) \in (0; +\infty) \times (0; +\infty)$*, kuriem atrisinājums* $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ *konverģē uz šo atrisinājumu ar periodu* 2.

Par šo pētījumu rezultātiem sagatavoti referāti un tie prezentēti konferencēs [17], [25], [28], [30], [33], iesniegts publicēšanai raksts [4].

Atskaites periodā vāktas un analizētas citu autoru publikācijas par jaunākajiem atklājumiem diferenču vienādojumu izpētē.

Daļa LU doktorantūras skolas „Atomāro un nepārtrauktās vides fizikālo procesu pētīšanas, modelēšanas un matemātisko metožu pilnveidošanas skola” virziena „Tehnomatemātikas aktuālās problēmas” semināru veltīti neironu tīklu modelēšanai un to izturēšanās aprakstīšanai ar diferenču vienādojumiem. Analizēts raksts Z.Zhou *Periodic orbits on discrete dynamical systems,* Computers and Mathematics with Applications, 45: 1155-1161, 2003, kurā pētīts viena neirona modelis $x_{n+1} = \beta x_n - g(x_n),\ n = 0, 1, \ldots$ ar ļoti vienkāršu signālfunkciju $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. Šī publikācija ņemta par pamatu un uzrakstīts raksts „Periodic Orbits of Single Neuron Models with Internal Decay Rate $0 < \beta \leq 1$” [5] (līdzautori A. Aņisimova, I. Bula), kur signālfunkcija ir formā:

$$g(x) = \begin{cases} -b, & x \leq -\alpha \\ -a, & -\alpha < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ a, & 0 < x < \alpha \\ b, & x \geq \alpha \end{cases}, \ (b > a > 0 \text{ un } \alpha > 0).$$

3. Automodeļu diferenciālvienādojumu un to sistēmu robežproblēmu atrisinājumu un to atvasinājumu aprioro novērtējumu iegūšana nolūkā konstatēt robežproblēmas atrisināmību.

Ziņojumā [14] atbilstoši projekta mērķiem tika veikts mēģinājums pārnest klasiskos nosacījumus, kuri nodrošina atklātā formā uzdotu otrās kārtas nelineāru diferenciālvienādojumu robežproblēmu atrisinājuma un tā atvasinājuma aprioros novērtējumus uz diferenču vai pat „laika skalas" („time scale") vienādojumiem. Minētos klasiskos nosacījumus otrās kārtas diferenciālvienādojumu un to sistēmu robežproblēmu atrisinājumiem iespējams formulēt tā saucamo apakšējo un augšējo funkciju terminos. Savukārt, robežproblēmu atrisinājumu, kuriem konstatēts apriorais novērtējums, atvasinājumu aprioro novērtējumu nodrošina Nagumo vai Šrēdera tipa nosacījumi vai to vispārinājumi. Nagumo tipa nosacījumu vispārinājumi nereti var tikt izteikti ar vienpusīgiem diferenciālvienādojuma labās puses novērtējumiem. Atsevišķās situācijās nosacījumi, kuri garantē atrisinājumu, kuriem konstatēts apriorais novērtējums, atvasinājumu aprioro novērtējumu var tikt, līdzīgi kā lietojot apakšējās un augšējās funkcijas, var arī tikt izteikti diferenciālnevienādību formā. Iegūtie robežproblēmas atrisinājuma un tā atvasinājuma apriorie novērtējumi ļauj risināt jautājumu par robežproblēmas atrisinājuma eksistenci, turklāt vairāki nešķeļošies atrisinājumu apriorie novērtējumi ļauj izvērtēt arī atrisinājumu skaita novērtējumu, turklāt apriorie novērtējumi garantē stabilu atrisinājumu eksistenci, papildus kuriem iepējami arī nestabili atrisinājumi.

Apakšējo un augšējo funkciju lietojums diferenču un „laika skalas" vienādojumu atrisinājumu apriorā novērtējuma konstatēšanai literatūrā ir samērā veiksmīgi aprobēts, ko nevar teikt par nosacījumiem atrisinājuma, kuram konstatēts apriorais novērtējums, atvasinājuma analoga aprioro novērtējumu. Ziņojumā [14] formulētos nosacījumus šādam mērķim diferenču un „laika skalas" vienādojumiem raksturo zināma formalitāte un tās izraisīta nekonstruktivitāte. Galvenokārt akcentēti robežproblēmā iesaistītā vienādojuma konkrēti atrisinājuma izturēšanās aizliegumi, par kuriem būtu nepieciešams spriest pēc vienādojuma labās puses izturēšanās. Diemžēl šis ir šobrīd neatrisināts uzdevums.

Paralēli otrās kārtas diferenču vienādojumu un "laika skalas" vienādojumu robežproblēmu atrisinājumu aprioro novērtējumu problemātikai turpinājās automodeļu diferenciālvienādojumu iegūšanas un to robežproblēmu izpēte. Šiem jautājumiem tika veltīti ziņojumi [9], [13], [20].

Piemērs. Hidrodinamiskās plūsmas robežslānī taisnstūra kanālā apraksta parciālo diferenciālvienādojumu sistēma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

ar robežnosacījumiem

$$u(x,0) = \beta\frac{\partial u(x,0)}{\partial y},\quad \frac{\partial \mathrm{T(x,0)}}{\partial \mathrm{y}} = -\frac{q_w}{k_\infty},$$

$$v(x,0) = 0,\ u(x,\infty) = u_\infty,\ T(x,\infty) = T_\infty .$$

Lietojot līdzības transformāciju

$$f'(\eta) = \frac{u}{u_\infty}, \quad \eta = y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}},$$
$$\Theta(\eta) = \frac{k_\infty (T - T_\infty)}{q_w x}\sqrt{\mathrm{Re}}$$

iegūstam robežproblēmu parasto (automodeļu) diferenciālvienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} f''' + \dfrac{1}{2} ff'' = 0, \\ \Theta'' + \dfrac{\mathrm{Pr}}{2}(\Theta' f - \Theta f') = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(0) = 0, \; f'(0) = \kappa f''(0), \; \Theta'(0) = -1, \\ f'(\infty) = 1, \; \Theta(\infty) = 0, \end{cases}$$

$$\kappa = \frac{\beta}{x}\sqrt{\mathrm{Re}}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}.$$

Ievērosim, ka, ja robežnosacījumi pieļauj plūsmas slīdēšanu gar kanāla sienu ($\beta \neq 0$),

esam ieguvuši, ka viens no robežnoscījumiem ir kļuvis neklasisks.

Ja iepriekšējo robežslāņa parciālo diferenciālvienādojumu sistēmu aplūkojam bez temperatūras vienādojuma, ievedot plūsmas funkciju Ψ iegūstam

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x};$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) = \nu\left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}\right).$$

Lietojot automodeļu mainīgos, pārveidojam šos vienādojumus

$$\Psi(x, y) = \Psi_m(x) f(\eta), \; \eta = \frac{y}{\delta(x)};$$
$$f''' = \frac{\delta \Psi_m}{\nu}(f'^2 - ff'') - \frac{\Psi_m \delta'}{\nu} f'^2.$$

Lai iegūtu automodeļu parasto diferenciālvienādojumu, obligāti nepieciešamas sekojošas sakarības

$$\frac{\delta \Psi_m}{\nu} = a = const \;, \quad \frac{\Psi_m \delta'}{\nu} = b = const \;,$$

Rezultātā iegūtais automodeļu parastais diferenciālvienādojums pēc diferencēšanas iegūst šādu izskatu

$$f^{(IV)} + aff''' + (2b - a)f'f'' = 0.$$

Aplūkojot iekšēju siltuma konvekciju gar plānu sakarsētu plāksni, kura iegremdēta porainā vidē tika iegūta Valle – Pussēna tipa automodeļu robežproblēma (Z.Belhachmi et al, On the Family of Differential Equations for Boundary Layer Approximations in Porous Media. European Journal of Applied Mathematics, 12, 2001, 513-528)

$$f^{(iv)} + \frac{1+\beta}{2} ff''' + \frac{1-3\beta}{2} f'f'' = 0;$$
$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1; \quad f(\infty) = 1; \quad f'(\infty) = 0.$$

Fizikālu interesi izraisa šīs robežproblēmas atrisinājumi, kuri apmierina novērtējumu

$$0 \le f'(t) \le 1, \quad t \in [0, +\infty).$$

Vispārinot augstāk minēto vienādojumu, varam rakstīt

$$f^{(iv)} + g_1(\beta) ff''' + g_2(\beta) f'f'' = 0,$$

Aplūkojamai robežproblēmai ir viens vienīgs fizikāls atrisinājums, ja

$$\frac{1}{2} \le g_1(\beta) < +\infty; \quad -\infty < g_2(\beta) \le \frac{1}{2},$$

savukārt robežproblēmai nav atrisinājumu, ja

$$-\infty \le g_1(\beta) \le \frac{1}{4}; \quad \frac{5}{4} \le g_2(\beta) \le +\infty.$$

Atlikuši gadījumi

$$\frac{1}{4} < g_1(\beta) < \frac{1}{3}; \quad 1 < g_2(\beta) < \frac{5}{4};$$

$$\frac{1}{3} \le g_1(\beta) < \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} < g_2(\beta) \le 1.$$

Pirmajā no tiem robežproblēmai nav fizikāla atrisinājuma, bet otrajā – robežproblēmai eksistē vismaz viens fizikālais atrisinājums. Jāpiebilst, ka šajos gadījumos robežproblēmai nav spēkā atrisinājuma unitāte.

Aprioro novērtējumu metodes lietojumiem automodeļu parasto diferenciālvienādojumu sistēmu atrisināmības konstatēšanai bija plānots ziņojums [37]. Diemžēl referenta saslimšanas dēļ piedalīšanos simpozijā nācās atcelt.

4. Hiperboliska tipa siltumvadīšanas vienādojuma lietojumi.

S.Blomkalna darbu projektā uzsāka vadošā pētnieka A.Buiķa vadītajā darba grupā. 2011.gada oktobrī viņa iestājās LU doktorantūrā, kur par darba vadītāju tika norīkots J.Cepītis. Sākuma posmā viņa turpināja iesākto hiperboliskā tipa siltuma vadīšanas vienādojuma (HSVV) izpēti un tā skaitliskās risināšanas metodes izstrādi A.Buiķa vadībā. Tas atspoguļots 2012.gada konferenčū tēzēs [29, 35] un iesniegtajā publikācijā [6]. Šie darbi pieder pētījumu sērijai, kura veltīta konkrētam HSVV lietojumam metalurģijas tehnoloģijās intensīvās tērauda rūdīšanas procesa matemātiskajam modelim. Vienlaicīgi S.Blomkalnai tika formulēts uzdevums apzināt citas lietojumu jomas, kurās izmantojams šāda tipa vienādojums.

S.Blomkalnas pārskatā kā visplašākais HSVV lietojums atzīmēts lāzera stara iedarbības uz dažādiem materiāliem modelēšanā, modelējot ultraīso impulsu lāzeru darbību. Vairākas publikācijas aplūko plānu zelta plāksnīšu sildīšanu, izmantojot femto sekunžu pulsu lāzeru. Tajās skaitliskie eksperimenti veikti gan uz HSVV, gan parabolisko siltuma vadīšanas vienādojumu balstītiem matemātiskiem modeļiem, variējot arī risināšanas metodes un dimensiju skaitu. Virknē publikāciju tiek aplūkota lāzera stara iedarbība uz bioloģiskas izcelsmes materiālu – siltumstarojuma absorbcija audos. Ievērota tiek sildīšanas aprakstīšana ar dažāda veida funkcijām – konstanta, sinusoidāla, impulsveidīga. Dažos rakstos HSVV izmantots modelējot bioloģiska materiāla (ādas, aknas, nieres, u.tml.) sildīšanu, izmantojot radioviļņu frekvenci – ķirurģiskās procedūrās – īss, lokalizēts karstuma impulss. Sastopami viendimensiju problēmu risinājumi daudzslāņainiem materiāliem, iekļaujot stabilitātes analīzi. Tāpat risināti modeļi cilindriskiem un sfēriskiem objektiem, pieļaujot eksponenciāli mainīgas materiālu īpašības. Atsevišķi HSVV modeļi lietoti aplūkojot hiperbolisku reakcijas difūzijas modeli vīrusu izplatībai baktēriju kolonijā, piesārņojuma izplatīšanos ostās, mežu ugunsgrēku izplatīšanās, u.tml.

5. Elektronu plūsmas modelēšana žirotronā .

Pētnieku grupai uzkrāta atzīstama pieredze nelineāru Srēdingera tipa vienādojumu sistēmu kvalitatīvā un skaitliskā risināšanā, lai modelētu elektronu kustību žirotronā, kas nepieciešama pētījumos un aprēķinos par kontrolētu termo nukleāro reakciju jauna tipa atomreaktoros.

Matemātiskais modelis reducējās uz nelineāra kompleksa Šrēdingera tipa parciālo diferenciālvienādojumu sistēmu, kas apraksta vienas vai vairākas elektronu RF lauka amplitūdu svārstību modas $f(x,t)$ žirotronā un transversālo orbitālo momentu $p(x,t)$ atkarībā no laika t un no x segmentā $[0,L]$.

Augstas frekvences RF lauka amplitūdas $f(x,t)$ rezonatorā un elektronu transversālās orbītas momentu $p(x,t,\vartheta)$ ar parametru ϑ $(0<\vartheta\le 2\pi)$ var aprakstīt ar kompleksu diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\frac{\partial p}{\partial x}+i(\Delta+|p|^2-1-g_b(x))p=if(t,x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-i(1+\delta_\omega)\frac{\partial f}{\partial t}+(1+0{,}5(\delta_\omega+g_c(x)))g_d(x)f=I(1+\delta_\omega)(1+g_c(x))^2<p>.$$

kur i ir imaginārā vienība, $0\le x\le L$, $t\ge 0$ ir aksiālā un laika koordinātes, L –interaktīvā lauka garums, Δ, δ_ω - reālas fizikālas konstantes, I – strāvas stiprums, $g_b(x)$, $g_c(x)$, $g_d(x)$ – dotas reālas telpas mainīgā x funkcijas, $<p>$ viduvētā (integrālā) pēc ϑ mainīgā p vērība.

Sistēmu papildina sākuma nosacījumiem $p(t,0,\vartheta)=\exp(i\vartheta)$, $f(x,0)=f_0(x)$, un robežnosacījumiem $f(0,t)=0$, $\frac{\partial f(L,t)}{\partial x}=-i\gamma f(L,t)$, kur $f_0(x)$ ir dota kompleksa funkcija un γ - pozitīvs parametrs. Dotais modelis ievēro elektronu relatīvo faktoru attiecībā pret aksiālo asi un atkarību no magnētiskā lauka. Pēdējie faktori vienkāršotās versijās netiek ņemti vērā. Grūtības parādījās risinot nestacionāro procesu pie lielām laika t vērtībām.

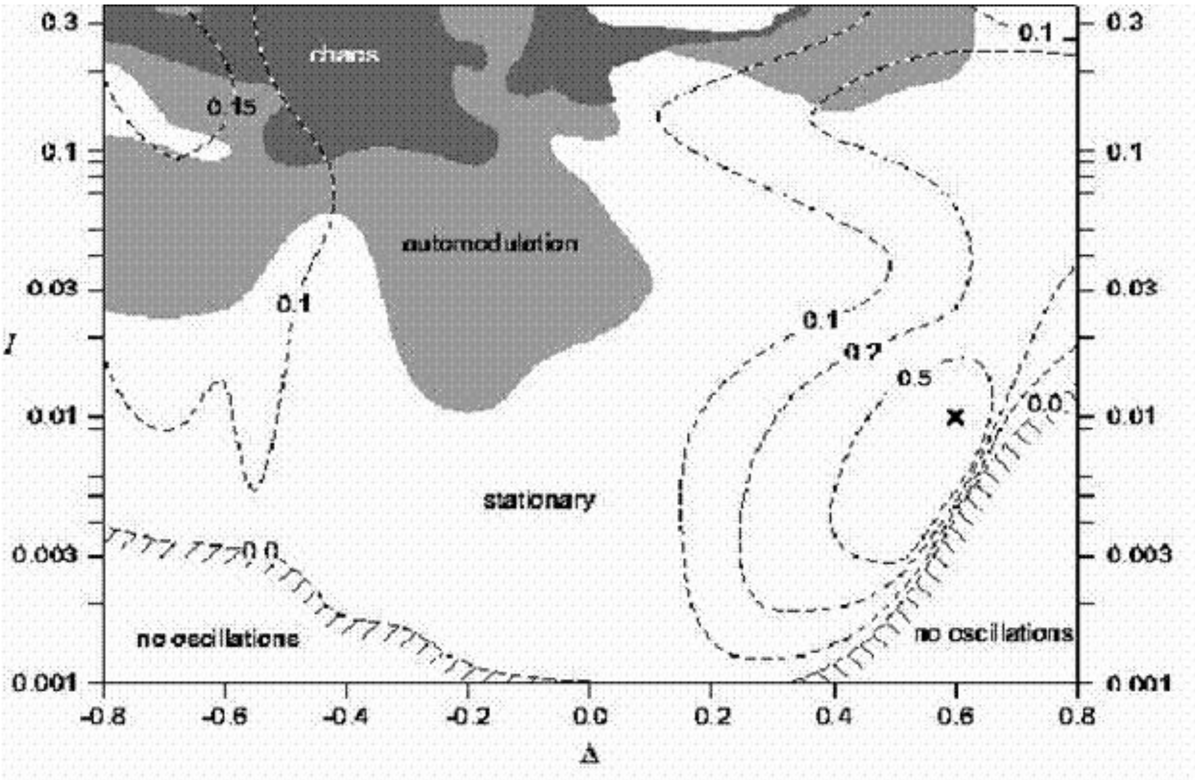
Atrasti novērtējumi enerģijas saglabāšanās likumam

$$I\eta=\frac{dW}{dt}=2\delta_1\gamma\,|f(t,L)|^2-2I\,\mathrm{Im}\int_0^L(1-g_2(x))f^*<p>dx.$$

kur elektronu perpendikulāra efektivitāte

$$\eta=1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(t,L,\theta_0)|^2\,d\theta_0$$

Žirotrona vienādojumu atrisinājumu struktūra ir ļoti sarežģīta. Pie dažādām parametru vērtībām fāzu aina būtiski izmainās. Attēlā parametru (I, Δ) plaknē (skat. 1.zīm.) atzīmēti apgabali, kuri atbilst dažādiem oscilācijas tipiem, t.i. stacionāriem, automodulācijai un haotiskām oscilācijām.

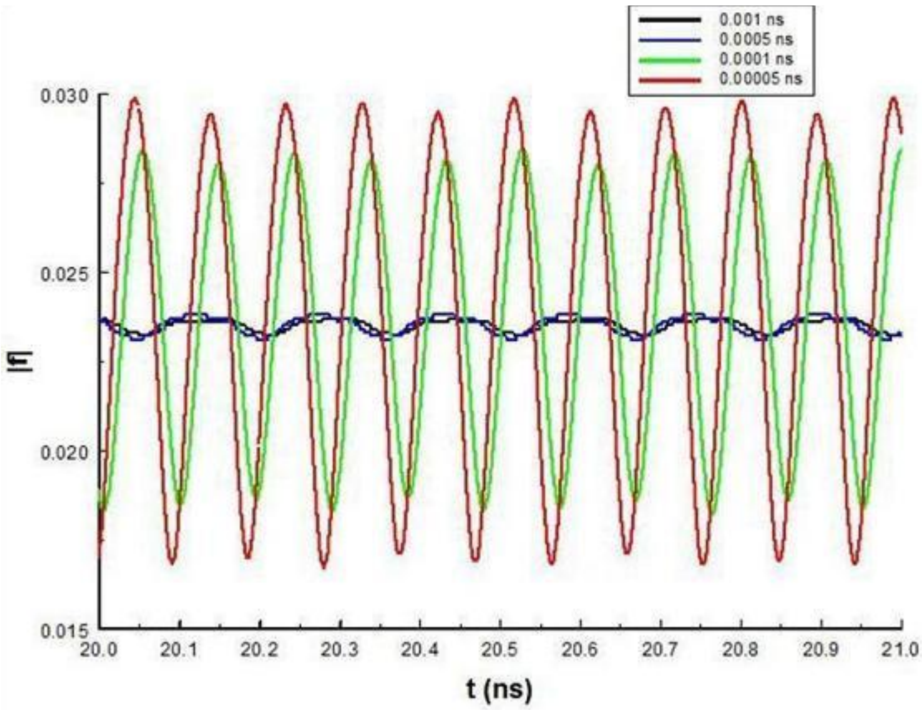


1.zīmējums

Izrādījās, ka aproksimācija telpā ar centrālām diferencēm (DS-2) un laikā ar aizklāto diferenču shēmu ir nestabila žirotrona jaunajai versijai, jo atrisinājums samazinot laika soli kļuva oscilējošs kā laikā tā arī telpā (O.Dumbraja skaitliskie eksperimenti 2010. g.). Lai uzzinātu šo atrisinājumu atbilstību fizikai tika lietota taišņu metode, reducējot parciālos diferenciālvienādojumus laikā uz parasto diferenciālvienādojumu sistēmu un tos risinot ar MATLAB solveriem, kur laika solis tiek izvēlēts automātiski pēc uzdotās precizitātes. Skaitliskie aprēķini parādīja, kas stacionārā atrisinājuma f svārstības telpā tiešām ir konstatējamas, turpretī laikā nav (skat. 2.zīm.).

Sadarbībā ar fiziķiem, analizējot vienas modas žirotrona vienādojumus, konstatēts, ka pie maziem laika soļiem oscilāciju ar augošu amplitūdu avots ir elektronu relativiskais faktors un atkarība no magnētiskā lauka (skat. 2.zīm.)

Sagatavoti un publicēti raksti [1,2] SCI Expanded žurnālos „Mathematical Modeling and Analysis” un „Nonlinear Analysis: Modelling and Control” un tēzes [18] referātā konferencē Siguldā (2011).



2.zīmējums

6. Nelineāras plazmas plūsmas perturbācijas.

Plazmas nestabilitātes kodolsintēzes reaktoros (tokamakos) ir saistītas ar plazmas nelineārām perturbācijām. Šo parādību var modelēt ar diviem vienādojumiem, pirmais apraksta sistēmas relaksācijas dinamiku, otrais sistēmas piedziņu:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt_n^2}\xi_n = \left(p_n' - 1\right)\cdot\xi_n - \delta\cdot\dfrac{d}{dt_n}\xi_n \\ \dfrac{d}{dt_n}p_n' = \eta\cdot\left(h - p_n' - \alpha\cdot\xi_n^2\cdot p_n'\right) \end{cases} \tag{1}$$

kur ξ ir magnētiskā lauka nobīde, p' ir plazmas spiediena gradients, δ ir disipācija, η ir attiecība starp normālo siltuma difūziju un perturbāciju rezultātā radušos siltuma difūziju, *h* ir sistēmā ievadītā jauda, α ir attiecība starp anomālo un normālo siltuma difūziju, indekss *n* norāda, ka visi lielumi ir normēti (bez dimensijām). Šī vienādojumu sistēma ekvivalenta triju pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu autonomai nelineārai sistēmai.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (z-1)\,y - \delta \cdot x \\ \dfrac{dy}{dt} = x \\ \dfrac{dz}{dt} = \eta \cdot \left(h - z - y^2 z\right) \end{cases} \qquad (2)$$

Diferenciālvienādojumu sistēma (2) satur kvadrātisku un kubisku nelinearitāti. Pirmo reizi diferenciālvienādojumu (2011) ieguva Maksa Planka plazmas fizikas institūta zinātnieki D.Constantinescu, O.Dumbrajs, V.Igochine, K. Lackner, R.Meyer-Spasche, H.Zohm. A low-dimensional model system for quasi-periodic plasma perturbations. Physics of Plasmas 18 (2011), no.6.

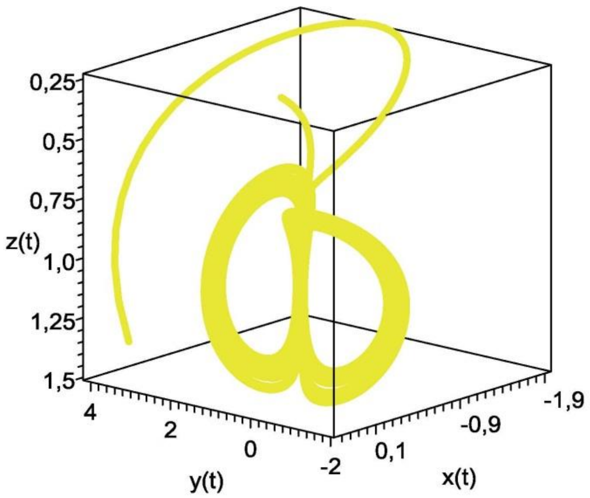
Iegūta sistēma ir zināmā mērā līdzīga Lorenca vienādojumu sistēmai, kurai ir ļoti sarežģīta fāzu ainu. Vispirms jāatzīmē, ka sistēma ir disipatīva, t.i, $div(X) = -\delta - \eta - \eta y^2$. Tas nozīmē, ka diferenciālvienādojumu sistēmas ģenerētā plūsma saspiež tilpumus. Bet tas savukārt nozīmē, ka neeksistē invariantie trajektoriju tori, kurus veido kvazi periodiski atrisinājumi. Savukārt eksistē atraktori un trajektorijas asimptotiski tuvojās tiem. Otra raksturīga īpašība ir, ka sistēma ir simetriska attiecībā pret z asi.

Lemma Diferenciālvienādojumu sistēmai (2) ir trīs stacionārie punkti $P_1 = (0,0,h)$, $P_2 = (0,\sqrt{h-1},1)$ un $P_3 = (0,-\sqrt{h-1},1)$. Stacionārais punkts P_1 ir asimptotiski stabils, ja $0 < h < 1$. Ja $h > 1$, tad P_1 ir sedlu punkts ar divu-dimensiju stabilu un vien-dimensiju nestabilu varietāti. Savukārt simetriskie stacionārie punkti P_2 un P_3 ir asimptotiski stabili, ja $\delta h(\delta + \eta h) > 2(h-1)$ un nestabili, ja $\delta h(\delta + \eta h) < 2(h-1)$ ar vien-dimensiju stabilu un divu-dimensiju nestabilu varietāti.

Lai pierādītu šo rezultātu atrodam Jakobi matricu stacionārajos punktos, atrodam un harakteristiskos polinomus un izmantojot Rīsa-Gurvica kritēriju nosakām īpašvērtību reālo daļu zīmes.

Skaitliskie eksperimenti parāda, ka diferenciālvienādojumu sistēmai ir dažāda tipa bifurkācijas. Savukārt izlietojot analītiskās metodes var konstatēt, ka ir dakšveida bifurkācija stacionārā punktā P_1 un Andronova-Hopfa bifurkācijas stacionāros punktos P_2 un P_3. Precīzāk, izlietojot centra varietātes teoriju kopā ar redukcijas principu var konstatēt, ka stacionārais punkts P_1, ja $h = 1$ ir lokāli asimptotiski stabils un superkritisks dakšveida bifurkācijas punkts. Savukārt stacionārie punkti P_2 un P_3 ir superkritiski vai subkritiski Andronova-Hopfa bifurkācijas punkti atkarībā no pirmā Ļapunova koeficienta zīmes. Šo stacionāro punktu mazās apkārtnēs atrodas stabili vai nestabili robežu cikli, kuri atbilst periodiskiem atrisinājumiem. Ja $h < 1$, tad stacionārais punkts P_1, ir globāli asimptotiski stabils.

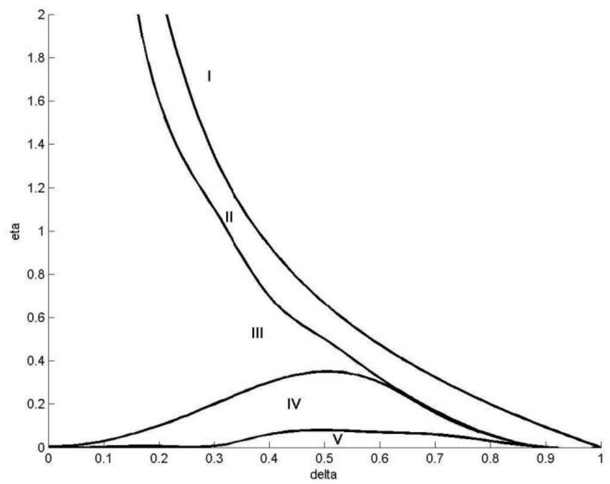
Skaitliskie eksperimenti parāda, ka diferenciālvienādojumu sistēmai (2) pie parametru vērtībām $\delta = 0.845$, $\eta = 0{,}0845$ un $h = 1{,}7$ un sākuma vērtībām $(x_0, y_0, z_0) = (0{,}1;4{,}1;1{,}4)$ eksistē savāds (strange) atraktors. Skat. 3.zīm.



3.zīmējums

Skaitliskie eksperimenti ļauj noteikt oscilāciju dinamiskās zonas parametru δ, η plaknē $(h = 1{,}5)$. Var izšķirt 5 zonas:

1. rimstošas svārstības
2. vienkāršas periodiskas svārstības
3. eksistē dubultperiodiskas svārstības
4. eksistē haotiskas svārstības
5. zāģveida svārstības ar garu pieauguma periodu un īsu sabrukuma periodu. Skat. 4.zīm.



4.zīmējums

Pētīts dotās sistēmas fāzu portrets pie dažādām parametra vērtībām. Par doto tematiku ir darbi [26,31,38] un referēts konferencēs Jelgavā (2012), Tallinā (2012)un Novacellā (Itālijā) (2012). Bez tam izstrādāts bakalaura darbs (S.Avdejevs) (2011).

7. Pētījumi šķiedru suspensiju reoloģijā.

Ulda Strautiņa pētījumu vienojošā tēma bija šķiedru suspensiju plūsmas matemātiskā modelēšana. Projekta gaitā tika pētīti vairāki šīs problēmas aspekti: sienas efekta modelēšana, vienkāršu plūsmu stabilitāte, PGD metode kā universāla pieeja dažādu parciālu diferenciālvienādojumu skaitliskai risināšanai, tai skaitā reoloģijas vienādojumiem. Iegūti vairāki jauni rezultāti.

Sienas efekta modelēšana. Svarīgs elements, kas nav iekļauts praksē lietotajos šķiedru suspensijas plūsmu matemātiskajos modeļos, ir sienas efekts – sienas klātbūtnes ietekme uz šķiedru orientāciju. Precīzs divfāzu plūsmas apraksts, izšķirot katru šķiedru un šķidruma ātrumu ap to, praksē sastopamajos procesos nav realizējams ģeometrijas pārāk sarežģītās, laikā strauji mainīgās struktūras dēļ, tāpēc ir nepieciešami vienkāršoti modeļi. Šī projekta ietvaros ir izstrādāti divi oriģināli modeļi: mezoskalas modelis un mikroskalas modelis.

Mikroskalas modelī sienas klātbūtne tiek aprakstīta ar ģeometrisku (kinemātisku) nosacījumu, ka šķiedras virsma nevar šķērsot sienas virsmu. Ir iegūts Džefrija vienādojuma vispārinājums, kas sniedz atsevišķas šķiedras orientāciju aprakstošā vienības vektora evolūciju, atkarībā no tā, vai šķiedra atrodas kontaktā ar sienu. Vienādojuma deterministkā forma ir:

$$\dot{p} = \begin{cases} \dot{p}_J := (I - p \otimes p) \cdot Mp, & p \cdot n > d/l, \\ \dot{p}_J - (n \cdot p_J) \frac{n-(p \cdot n)p}{\|n-(p \cdot n)p\|^2}, & p \cdot n = d/l. \end{cases}$$

Lai modelētu citu šķiedru klātbūtnes radītās perturbācijas mehānisku sadursmju dēļ vai hidrodinamiskās mijiedarbības rezultātā, vienādojums tiek papildināts ar stohastisku spēku, iegūstot Lanževēna vienādojumu.

Augstāk minētais vienādojums kontakta gadījumā apraksta šķiedras gala slīdēšanu gar sienu. Reāli sadursmes ar sienu ir retas tā dēvētā eļļošanas efekta dēļ. Tāpēc modelī iekļauts eļļošanas efekts, t.i., šķidruma slānītim starp šķiedru un sienu kļūstot plānākam, uz šķiedru darbojas atgrūdošs spēks. Iegūts arī vispārīgāks modelis, kas apraksta šķiedras atgrūšanos no sienas sadursmes rezultātā. Tad šķiedras pozīciju apraksta divi mainīgie: orientācijas vektors un šķiedras attālums līdz sienai. Abu mainīgo evolūciju apraksta stohastisks diferenciālvienādojums. Modeļa struktūra ļauj iekļaut arī citus parametrus, piemēram, šķiedru mobilitātes koeficientus.

Ar dažādām šī modeļa versijām tika veikti skaitliski eksperimenti dažādām praksē sastopamām plūsmām. Rezultāti nekad nenoved pie fizikāli neiespejamiem orientāciju sadalījumiem (kādus regulāri iegūst Folgara-Takera modeļa gadījumā), un kvalitatīvi labi atbilst fizikālos eksperimentālos novērotajiem šķiedru orientācijas sadalījumiem sienu tuvumā. Lai kvantitatīvi aprakstītu sienas raupjuma ietekmi uz orientācijas sadalījumu, par ko eksperimentu rezultātus publicējusi Soderberga vadītā grupa, nepieciešams precīzāks modelis šķiedras sadursmei ar sienu.

Mezoskalas modeļa ietvaros [11] šķiedru ansambļa stāvokli apraksta orientācijas sadalījuma funkcija. Klasiskais Folgara-Takera modelis ir Fokera-Planka vienādojums, kas iegūts no Džefrija vienādojuma ar izotropiskas orientācijas difūzijas pieņēmumu. Lai iekļautu sienas efektus, iespējami divi ceļi: izmantot iepriekš aprakstīto Džefrija modeļa vispārinājumu, vai arī modificēt pašu Folgara-Takera modeli, nepieļaujot ģeometriski neiespējamus šķiedru orientācijas sadalījumus sienas tuvumā.

Šim nolūkam tiek pārbaudīts, vai sienas tuvumā Folgara-Takera modeļa prognozētais orientācijas tenzors ir ģeometriski pieļaujams. Ja ne, tad tiek veikts projekcijas solis, kas fenomenoloģiski apraksta šķiedru slīdēšanu gar sienu. Projekcijas virziens tiek noteikts, interpolējot starp diviem virzieniem. Pirmais no tiem ir precīzs gadījumos, kad orientācijas sadalījuma funkcija ir triju Diraka delta distribūciju summa orientācijas tenzora īpašvektoru virzienos, otrais – tad, ja sadalījuma funkcija ir identiska orientācijas tenzoram atbilstošajam otrās kārtas izvirzījumam sfēriskajās harmonikās. Interpolācija tiek veikta, novērtējot orientācijas "saspiestības" pakāpi ar orientācijas tenzora determinanta palīdzību līdzīgi kā hibrīdā slēguma tuvinājuma gadījumā. Šis modelis ticis testēts Fraunhofer ITWM izstrādātā datorprogrammā "CoRheoS", iegūta laba sakritība ar eksperimentu rezultātiem [39].

Fokera-Planka vienādojums Džefrija modeļa vispārinājumam ir sarežģītāks parabolisks parciāls diferenciālvienādojums uz varietātes ar malu, turklāt atrisinājumi ir vispārinātas funkcijas jeb distribūcijas, t.i., varietātes mala var nest pozitīvu orientācijas sadalījuma "masu".

Pētītas dažādas skaitliskās metodes šāda (advekcijas-difūzijas) tipa vienādojumu risināšanai. Eksperimentēts ar lineāru advekcijas-difūzijas vienādojumu atrisinājumu izvirzīšanu sfēriskajās harmonikās. Ja advekcijas ātrumu nosakošie koeficienti ir polinomiālas koordināšu funkcijas, tad vienādojumu uzdodošais eliptiskais operators galīgu sfērisko harmoniku lineāru kombināciju attēlo par tādas pašas formas funkciju, turklāt izvirzījuma koeficientus var noteikt, rekursīvi izmantojot noteiktus transformāciju likumus, kas izriet no sfērisko harmoniku īpašībām (*Montgomery-Smith, Jack, Smith* 2010). Tas ne tikai noved pie efektīvām skaitliskām metodēm, bet arī ļauj tieši novērtēt momentu metožu (arī slēguma aproksimāciju) precizitāti atkarībā no izmantotā momenta kārtas un parametru vērtībām.

Salīdzināta dažādu sfērisko bāzes funkciju precizitāte, risinot difūzijas dominētas problēmas parciāliem diferenciālvienādojumiem uz sfēras ar kolokācijas metodi. Konkrēti tika apskatītas dažādas gluduma pakāpes Venlanda un Vū funkcijas, lai diskretizētu sfērisko argumentu. Iegūtie skaitliskie rezultāti eliptiska un paraboliska tipa vienādojumiem salīdzināti ar precīzo atrisinājumu dažādās normās dažādām kolokācijas punktu kopām. Iegūti rezultāti arī viļņu vienādojumam.

Vienkāršu plūsmu stabilitāte. Lineārās stabilitātes analīze, kuru Folgara-Takera modelim veica *Lin Jianzhong* vadīta grupa, tika pielietota FTMS modelim [7,8], kas ir Folgara-Takera modeļa vispārinājums koncentrētu suspensiju gadījumam un apraksta šķiedru orientācijas tenzora evolūciju globāla ātruma lauka iespaidā:

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}a^{(2)} &= a^{(2)}\cdot M + M^{\top}\cdot a^{(2)} - (M+M^{\top}) : a^{(4)} \\ &\quad +\dot{\gamma}\left\{C_i(I-3a^{(2)}) + S_0(a^{(2)}\cdot a^{(2)} - a^{(2)} : a^{(4)})\right\}\end{aligned}$$

Šeit M ir iegūta no ātruma lauka gradienta, kur

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\nabla u = -\rho^{-1}\nabla p + \nabla\cdot(\tau_s+\tau_f)$$

$$\tau_s+\tau_f = Re^{-1}(\nabla u + \nabla^{\top}u) + N_p\nabla u : a^{(4)}.$$

Suspensijai plūstot kanālā (vai neierobežotā apgabalā starp divām plaknēm), parādās spēcīgi tranzienti efekti, kas saistās ar šķiedru nostāšanos šķērsām ātrumu laukam, stipri paaugstinot suspensijas efektīvo viskozitāti. Taču pietiekami garos kanālos suspensija sasniedz stacionāru stāvokli, un tad ātruma profils ir parabolisks (Puazeja plūsma). Mazas stacionārās plūsmas perturbācijas noved pie tranzientiem efektiem, kuru uzvedību var studēt ar lineārās stabilitātes analīzi [27].

Apskatot harmoniskas suspensijas stāvokļa perturbācijas, tika iegūta robežproblēma ceturtās kārtas parastam diferenciālvienādojumam, kas apraksta perturbācijas plūsmas funkciju atkarībā no perturbācijas viļņa garuma un virziena, kā arī perturbācijas augšanas vai dilšanas eksponentes. Šo robežproblēmu var uzskatīt par klasiskās Orra-Zommerfelda problēmas vispārinājumu: atrast kompleksa parametra c vērtības, pie kurām robežproblēmai

$$\sum_{k=0}^{4} J_k(y, \alpha, Re, C_i, S_0, c)\partial_y^k \phi(y) = 0$$

ar homogēniem Dirihlē robežnosacījumiem eksistē netriviāls atrisinājums. Plūsmas stabilitāti nosaka komplekso īpašvērtību c imaginārās daļas zīme.

MATLAB vidē tika realizētas vairākas skaitliskas metodes šīs problēmas komplekso vispārināto īpašvērtību atrašanai. Labākie rezultāti tika iegūti, izmantojot linearizētas problēmas diskretizāciju Čebiševa režģī, kā arī izmantojot iebūvēto funkciju bvp4c [32].

Iegūtas plūsmas neitrālās stabilitātes līknes dažādām fizikāli reālistiskām parametru vērtību kopām - līknes, kas parāda, pie kādiem Reinoldsa skaitļiem plūsma ir stabila pret perturbācijām atkarībā no viļņu skaitļa. Rezultāti apstiprina eksperimentos novēroto faktu, ka šķiedru klātbūtne paplašina kanāla plūsmas stabilitātes reģionu. [36].

PGD metode ir skaitliska metode daudzdimensiju parciālu diferenciālvienādojumu skaitliskai risināšanai, sevišķi tenzorreizinājuma ģeometrijās. Mezoskalas reoloģijas vienādojumi ir paraboliska tipa vienādojumi fāzu telpā, kurai var būt patvaļīgi daudzas dimensijas (tipiski 20 līdz 100). Salīdzinājumā ar parastām skaitliskajām metodēm (piemēram, galīgo elementu metodi), kur brīvības pakāpju skaits aug eksponenciāli, paaugstinot dimensiju, PGD metodei brīvības pakāpju skaits aug tikai lineāri ar dimensiju, kas padara to par īpaši pievilcīgu kandidātu reoloģijas vienādojumu skaitliskai risināšanai.

Metodes pamatā ir ideja meklēt atrisinājumu kā vienargumenta funkciju reizinājumu summu:

$$u(x_1, \ldots, x_n) \approx \sum_{k=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} U_i^k(x_i),$$

kur nezināmās funkcijas aprēķina rekursīvi pa k. Šo summu ievieto vienādojumā, reizina ar testa funkciju un integrē pēc visām koordinātēm, izņemot vienu (viena argumenta funkciju reizinājumu tenzorreizinājuma apgabalā integrēt var ļoti efektīvi); rezultātā iegūst problēmu vājā formulējumā pret vienu viena argumenta funkciju. Parciālā diferenciālvienādojuma risināšana n dimensijās tiek reducēta uz daudzu parasto diferenciālvienādojumu risināšanu vienā dimensijā.

PGD metode ir samērā jauna un programmatūra, kas šo metodi realizē, nav brīvi pieejama, tāpēc pirmais solis bija iepazīties ar šo metodi vienkāršiem vienādojumiem – Laplasa vienādojumam, siltumvadīšanas vienādojumam, viļņu vienādojumam. Tika pētītas dažādas programmēšanas stratēģijas, sākuma tuvinājuma izvēles ietekme uz metodes konverģences ātrumu konkrētiem vienādojumiem atkarībā no labās puses.

Šo studiju mērķis ir PGD metodes realizēšana parciālu diferenciālvienādojumu risināšanā sfēru un intervālu Dekarta reizinājumos [39]. Sfēras parametrizācija polārajās koordinātēs dod tenzorreizinājuma tipa reprezentāciju, taču vienādojumi ar konstantiem koeficientiem sfēriskajās koordinātēs pārvēršas sarežģītākos vienādojumos. Iegūtas pirmās PGD versijas šāda tipa vienādojumiem; darbs pie šīs projekta daļas vēl turpinās.

Citi pētījumi. Tiek pētītas šķiedru suspensiju reoloģijas vienādojumu kvalitatīvās īpašības: atrisinājuma eksistences, unitātes un stabilitātes jautājumus Bohnera telpās, lietojot funkcionālanalīzes metodes. Uzlabojot kādas nevienādības formulējumu un vienkāršojot pierādījumu, vispārināta eksistences un unitātes teorēma mezoskalas reoloģisko vienādojumu sistēmas vājajam atrisinājumam. Jaunajā formulējumā avotu funkciju augšanai vairs nav jābūt ierobežotai ar polinomiem; pietiek, ka šīs funkcijas ir klasē C^{∞}.

Projektā iegūtie rezultāti prezentēti starptautiskās konferencēs: Latvijas Matemātikas konferencē[11,27], divās MMA konferencēs [32] un ECMI konferencē [36], tai skaitā divos plenārreferātos. Viesojos Fraunhofer ITWM institūtā Vācijā, prezentējot projekta tematiku un pirmos rezultātus. Publicēts raksts Nonlinear Analysis, sagatavošanā vēl vairāki raksti. Daži iegūtie rezultāti iekļauti mācību procesā Latvijas Universitātē, piemēram, kursos "Matemātiskās modelēšanas principi" un "Matemātiskā modelēšana". Tiešā saistībā ar dažādām projekta pētījuma tēmām izstrādāti un sekmīgi aizstāvēti trīs bakalaura darbi – Ansis Ozoliņš, Kārlis Olte, Mārtiņš Eglītis (izteikta Rektora atzinība par sekmīgu zinātnisku darbu)).

Publicētie, pieņemtie un iesniegtie publicēšanai darbi un referātu tēzes.

Zinātniskie raksti (recenzētos izdevumos)

1. A.Reinfelds, J. Cepītis, O. Dumbrajs, H. Kalis, and D. Constantinescu, Numerical experiments with single mode gyrotron equations, Mathematical Modelling and Analysis 17 (2012), no. 2, 251 – 270.

2. J. Cepītis, O. Dumbrajs, H. Kalis, A. Reinfelds and U. Strautiņš, Analysis of equations arising in gyrotron theory, Nonlinear Analysis: Modelling and Control 17 (2012), no.2, 139 – 152
3. A.Reinfelds, Conjugacy of discrete semidynamical systems in the neighbourhood of invariant manifold, Springer Proceedings in Mathematics (2012) (pieņemts publicēšanai, 8. lapp.)
4. A.Aņisimova, M. Avotiņa and I. Bula, Difference equations and discrete dynamical systems - Two sides of one whole" Proceedings of 13th International conference “Teaching Mathematics: Retrospectives and Perspectives” held in Tartu, Estonia, May 30 – June 1 (pieņemts publicēšanai).
5. A.Aņisimova, M. Avotiņa and I. Bula, Periodic orbits of single neuron models with internal decay rate $0 < \beta \leq 1$. Mathematical Modelling and Analysis (iesniegts publicēšanai).
6. S.Blomkalna, Heat conduction problem for double-layered ball. Mathematical Modeling and Analysis (iesniegts publicēšanai).
7. A. Latz, U. Strautins, D. Niedziela, Comparative Numerical Study of two concentrated suspensions models, J. Non-Newtonian Fluid Mech. (Elsevier) 165(13-14), 2010, 764-781
8. D. Niedziela, U. Strautins, V. Hosdez, A. Kech, A. Latz: Improved Multiscale Fiber orientation modeling in injection molding of short fiber reinforced thermoplastics: Simulation and Experiment, The International Journal of Multiphysics. Special edition: Multiphysics Simulations - Advanced Methods for Industrial Engineering. Selected Contributions from 1st Fraunhofer, Multiphysics Conference, 2011, ISBN 978-1-907132-36-0

Konferenču tēzes

9. J. Cepītis, Boundary value problems for the systems of self-similar equations, Abstracts of 8th Latvian Mathematical conference, April 9 – 10, 2010, Valmiera, Latvia, p. 21.
10. A.Reinfelds, Reduction principle in the theory of stability for homogeneous differential equations. Abstracts of 8th Latvian Mathematical conference, April 9 - 10, 2010, Valmiera, Latvia, p. 51
11. U. Strautins, Wall Effects: Geometrical constraints for fibre orientation, Abstracts of 8th Latvian Mathematical conference, April 9 - 10, 2010, Valmiera, Latvia, p. 58
12. A.Reinfelds, Reduction principle in the theory of stability for strongly nonlinear equations. Abstracts of 8th AIMS International conference on Dynamical systems, differential equations and applications, May 25 - 28, 2010, Dresden, Germany, p. 305
13. J. Cepītis, Solvability of the boundary value problems for certain self-similar equations, Abstracts of the 15th Conference Mathematical Modeling and Analysis, May 26 – 29, 2010, Druskininkai, Lithuania, p. 12.
14. J. Cepītis, Extension of results guaranteeing a priori estimates of the boundary problem solutions and their derivatives, Abstracts of 16th International conference on Difference equations and applications, July 19 – 23, Riga, Latvia, 2010, p. 15.
15. A.Reinfelds, Decoupling and simplifying of noninvertible difference equations. Abstracts of 16th International conference on Difference equations and applications, July 19 - 23, 2010, Rīga, Latvia, p. 47

16. A.Reinfelds, Reduction principle in the theory of stability of impulsive equations. Abstracts of International conference "Functional differential equations and applications", August 29 - September 2, 2010, Ariel, Israel
17. M. Avotiņa and I. Bula, Some problems of second-order rational difference equations. Abstracts of the 16th International conference MMA2011 held in Sigulda, Latvia, May 25 - 28, 2011, p. 9.
18. J. Cepītis, O. Dumbrajs, H. Kalis, A. Reinfelds and D. Constantinescu, Numerical experiments of single mode gyrotron equations. Abstracts of the 16th International conference MMA2011, Sigulda, Latvia, May 25 -- 28, 2011, p. 26.
19. A.Reinfelds, Reduction principle in the theory of stability of impulsive equations. Abstracts of the International conference "Differential equations and related topics" (Petrovskii Conference), Moscow, Russia, May 29 -- June 4, 2011, p. 98 -- 99.
20. J. Cepītis, Investigation of the boundary value problems for self-similar differential equations with quadratic nonlinearities, Abstracts of International conference on Differential & Difference Equations and Applications. Conference in honor of Professor Ravi P. Agarwal, Portugal, Ponta Delgada, July 4 – 8. 2011, p. 59.
21. A.Reinfelds, Decoupling and simplification of impulsive differential systems, Abstracts of International conference on Differential & Difference Equations and Applications. Conference in honor of Professor Ravi P. Agarwal, Ponta Delgada, Portugal, July 4 -- 8, 2011, p. 110.
22. A.Reinfelds, Theorem of reduction in the theory of stability of impulsive differential systems. Abstracts of the International conference on differential equations "Equadiff 2011" held in Loughborough, United Kingdom, August 1 -- 5, 2011, p. 134.
23. A.Reinfelds, Dynamical equivalence of impulsive differential systems. Abstracts of the International conference "Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis" held in Tbilisi, Georgia, September 9 -- 14, 2011, p. 105 -- 106.
24. A.Reinfelds, Reduction principle in the theory of stability of impulsive differential systems. Abstracts of Second International conference of Georgian Mathematical Union held in Batumi, Georgia, September 15 -- 19, 2011, p. 102.
25. M. Avotiņa, Behaviour of solutions of difference equations $x_{n+1} = \frac{1+x_{n-1}}{1+x_n}$ Abstracts of 9th Latvian Mathematical conference, March 30 – 31, 2012, Jelgava, Latvia, p. 6.
26. O. Dumbrajs and A. Reinfelds, Minimal physical model for interaction of MHD instability with plasma. Abstracts of 9th Latvian Mathematical conference, March 30 – 31, 2012, Jelgava, Latvia, p. 25.
27. U. Strautins, Stability of fiber suspension flows in channel domains. Abstracts of 9th Latvian Mathematical conference, March 30 – 31, 2012, Jelgava, Latvia, p. 57.
28. M. Avotiņa, A. Aņisimova and I. Bula, Difference equations and discrete dynamical systems Abstracts of 13th International conference “Teaching Mathematics: Retrospectives and Perspectives” held in Tartu, Estonia, May 30 – June 1, 2012. p. 12.
29. S. Blomkalna, Heat conduction problem for bi-layered ball, Abstracts of the 17th conference Mathematical Modeling and Analysis, Estonia, Tallinn, June 6 – 9, 2012, p. 23
30. M. Avotiņa and I. Bula, Periodic orbits of single neuron models II. Abstracts of 17th International conference "Mathematical Modelling and Analysis", June 6 -- 9, 2012, Tallinn, Estonia, p. 17.
31. O. Dumbrajs and A. Reinfelds, Qualitative investigation of dynamical system arising in plasma physics. Abstracts of 17th International conference "Mathematical Modelling and Analysis", June 6 -- 9, 2012, Tallinn, Estonia, p. 101.

32. U. Strautins, Stability analysis of fiber suspension flows in channel domains. Abstracts of 17th International conference "Mathematical Modelling and Analysis", June 6 -- 9, 2012, Tallinn, Estonia, p. 114.
33. M. Avotiņa, Initial condition problems for second order rational difference equations. Abstracts of 18th International conference on Difference Equations and Applications ICDEA 2012, July 22 -- 27, Barcelona, Spain, p. 25.
34. A.Reinfelds, Decoupling and simplifying of difference equations in the neighbourhood of invariant manifold. Abstracts of 18th International conference on Difference Equations and Applications ICDEA 2012, July 22 -- 27, Barcelona, Spain, p. 54.
35. S. Blomkalna, Heat conduction problem for double-layer ball. Abstracts of the 17th European Conference on Mathematics for Industry, Lund, Sweden, July 23 – 27, 2012, p. 29.
36. U. Strautins, On stability of a concentrated fiber suspension flow. Abstracts of the 17th European Conference on Mathematics for Industry, Lund, Sweden, July 23 – 27, 2012, p. 70.
37. J. Cepītis, Method of a priori estimates and solvability of boundary value problems for systems of ordinary differential equations, Abstracts of Symposium on Differential Equations and Difference Equations SDEDE 2012, Italy, Novacella, October 27 – November 2, 2012
38. A.Reinfelds, Phase portrait of dynamical system arising in plasma physics. Abstracts of Symposium on Differential Equations and Difference Equations SDEDE 2012, October 28 – November 1, 2012, Novacella, Italy.
39. U.Strautins, Modelling, numerics and analysis of fiber suspensions flows. Abstracts of 16th International conference MMA 2011, Sigulda, Latvia, May 25 -28, 2011, p.129.