

Projekta

„Atomāro un nepārtrauktās vides tehnoloģisko fizikālo procesu modelēšana, matemātisko metožu pilnveide un kvalitatīvā izpēte”

Nr.2009/0223/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/008

Tehniskā atskaite aktivitātē

4.4. Matemātisko modeļu skaitliskai risināšanai nepieciešamo skaitlisko metožu attīstība un kvalitatīva izpēte

Apstiprinu:

Projekta padomes priekšsēdētājs:

_____ **Jānis Mencis**

Apstiprinu:

LU Zinātņu prorektors:

_____ **Indriķis Muižnieks**

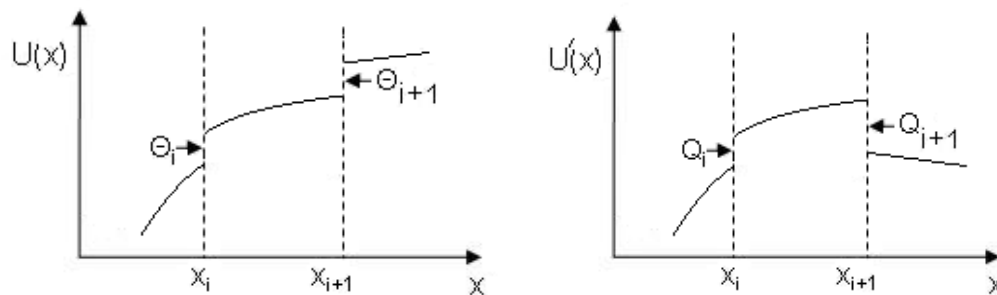
Pētījuma apakšaktivitāte

4.4.1. Klasisku matemātiskās fizikas metožu netradicionāla izmantošana matemātiskajā modelēšanā

Aktivitātes vadītājs: profesors Andris Buiķis

I Pirms aptuveni 30 gadiem A. Buiķis definēja jaunu splainu klasi: integrālos splainus. Integrālie paraboliskie splaini (IPS) pirmo reizi tika definēti A. Buiķa darbos [1], [2] un npublicētajā monogrāfijā [3]. IPS un attiecīgi integrālais racionālais splains tika definēti nepārtrauktai, gabaliem gludai funkciju klasei, kas apraksta procesus kārtainās vidēs. Rakstā [4] formulēts IPS vispārinājums: tajā tika pierādīta vispārinātā integrālā splaina (VIPS) eksistence un unitāte. VIPS apraksta procesus divkārtās kārtainās sistēmās: kad starp diviem slāņiem atrodas starpslānis. Visai bieži starpslānis var būt plāns un tad ar konservatīvās viduvēšanas metodi to var aproksimēt ar lineāru funkciju. Citiem vārdiem: ir definēti integrālās vērtības aproksimējoši splaini, gan polinomu formā, gan racionāli, kuri spēj aprakstīt arī robežas slāņus. To priekšrocība: viņu definīcijā ietver sevī nosacījumus, ka tie izpilda saglabāšanās likumus, kuri ir izpildīti parciālajos diferenciālvienādojumos. Tie ir izmantojami gan homogēnās vidēs, gan kārtainās vidēs, gan arī gadījumos, kad kādās vietās var būt atrisinājuma vai tā pirmā atvasinājuma lēcieni. Taču visos gadījumos tika apskatītas nepārtrauktas funkcijas, kuras uz divu slāņu robežas nepārtraukti pāriet no viena uz otru slāni. Taču koncentrācijas laukiem, ķīmisko reakciju gadījumos iespējams pirmā veida lēcieni funkcijai vai atvasinājumam. Tas tika izdarīts un atspoguļots rakstā [8]. Šeit tiek piedāvāts jauna abu integrālo splainu “normalizēta” forma.

Apskatam apgabalu $\Omega \subset R^1$. Dota nepārtraukta gluda funkcija $U(x)$, $x \in [a, b]$, kurai iekšējos x_i , $i = \overline{1, N}$ funkciju un tās pirmajam atvasinājumam $U'(x)$ ir lēcieni Θ_i , $i = \overline{1, N}$ pašai funkcijai $U(x)$, $x \in [a, b]$ un Q_i , $i = \overline{1, N}$ atvasinājumam $U'(x)$. Divos zīmējumos attēloti lēcieni funkcijai $U(x)$ un atvasinājumam $U'(x)$.



Kā jau tika teikts, ka, ja $\Theta_i = 0$, $i = \overline{1, N}$ mēs iegūstam nepārtrauktu funkciju un ar $\Theta_i = Q_i = 0$, $i = \overline{1, N}$ iegūstam IPS no rakstiem [1] - [4].

Tātad apskatam funkciju ar īpašībām:

$$k_{i-1}U'(x_i - 0) + \frac{Q_i}{2} = k_i U'(x_i + 0) - \frac{Q_i}{2}. \quad (1.1)$$

$$U(x_i - 0) + \frac{\Theta_i}{2} = U(x_i + 0) - \frac{\Theta_i}{2}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (1.2)$$

Papildus ir dotas integrālās vērtības apakšsegmentos $[x_i, x_{i+1}]$:

$$u_i = H_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} U(x) dx, \quad H_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = \overline{0, N} \quad (1.3)$$

Klāt jāpievieno robežnosacījumi funkcijai $U(x)$ gala punktos $x = a$ un $x = b$, kuri sevī iever visus trīs parastajiem un parciālajiem diferenciālajiem vienādojumiem:

$$-v_0 k_0 U'(a) + \lambda_0 U(a) = \Phi_0 \quad (1.4)$$

$$v_1 k_N U'(b) + \lambda_1 U(b) = \Phi_1, \quad (1.5)$$

$$v_l = 0, 1, \quad v_l + \lambda_l > 0, \quad l = 0, 1.$$

Šo interpolācijas problēmu risina ar polinomiālā splaina palīdzību:

$$S(x) = u_i + m_i(x - \bar{x}_i) + e_i \left[\frac{(x - \bar{x}_i)^2}{k_i H_i} - \frac{G_i}{12} \right], \quad (1.6)$$

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad G_i = \frac{H_i}{k_i} > 0$$

Nezināmo $2(N+1)$ brīvo koeficientu atrašanai mums ir tieši tik daudz vienādojumu (1), (2), (4) un (5). Līdzīgi kā iepriekšējās publikācijās [8]-[11], koeficienti m_i var tikt izteikti caur koeficientiem e_i divās formās:

a) (forma uz priekšu) indeksiem $i = \overline{0, N-1}$

$$3m_i k_i (G_i + G_{i+1}) + e_i (G_i + 3G_{i+1}) + 2e_{i+1} G_{i+1} + 3Q_{i+1} G_{i+1} + 6\Theta_{i+1} = 6(u_{i+1} - u_i) \quad (1.7_a)$$

b) (forma atpakaļ) indeksiem $i = \overline{1, N}$

$$3k_i m_i (G_i + G_{i-1}) - e_i (G_i + 3G_{i-1}) - 2e_{i-1} G_{i-1} - 3Q_i G_{i-1} + 6\Theta_i = 6(u_i - u_{i-1}) \quad (1.7_b)$$

Koeficientu m_i izslēgšana vērtībām $i = \overline{1, N-1}$ dod vienādojumu sistēmu koeficientiem e_i (tā vispārina agrāko vienādojumu sistēmu):

$$\begin{aligned} & a_i e_{i-1} + c_i e_i + b_i e_{i+1} = \\ & = f_i^- u_{i-1} - f_i u_i + f_i^+ u_{i+1} + \\ & + 3Q_{i+1} a_i + 3Q_i b_i + 2\Theta_{i+1} f_i^+ - 2\Theta_i f_i^-, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$i = \overline{1, N-1}$$

Šeit $f_i = f_i^- + f_i^+$ un

$$a_i = \frac{G_{i-1}}{G_i + G_{i-1}}, \quad b_i = \frac{G_{i+1}}{G_i + G_{i+1}}, \quad (1.9)$$

$$f_i^- = \frac{3}{G_i + G_{i-1}}, \quad f_i^+ = \frac{3}{G_i + G_{i+1}}$$

Robežnosacījumiem (4), (5) nepieciešami divu veidu apzīmējumi, jo konkrētās parametra vērtības nosaka, kurus apzīmējumus izmanto:

1) $\lambda_0 \neq 0$ (un $\lambda_1 \neq 0$). Tad

$$G_{-1} = \frac{2v_0}{\lambda_0}, \quad G_{N+1} = \frac{2v_1}{\lambda_1}, \quad (1.10_0)$$

$$u_{-1} = \frac{\Phi_0}{\lambda_0}, \quad u_{N+1} = \frac{\Phi_1}{\lambda_1}$$

2) $\lambda_0 = 0$ (un $\lambda_1 = 0$). Tad

$$G_{-1} = 2v_0 - G_0, \quad G_{N+1} = 2v_1 - G_N, \quad (1.10_1)$$

$$u_{-1} = \Phi_0 + u_0, \quad u_{N+1} = \Phi_1 + u_N$$

Robežas nosacījumi dod pirmo un pēdējo vienādojumu:

$$\begin{aligned} & (1 + a_0 + b_0)e_0 + b_0e_1 = \\ & = f_0^- u_{-1} - f_0 u_0 + f_0^+ u_1 + \\ & + 3Q_1 a_0 + 3Q_0 b_0 + 2\Theta_1 f_0^+ - 2\Theta_0 f_0^-, \quad (1.11) \\ & a_N e_{N-1} + (1 + a_N + b_N)e_N = \\ & = f_N^- u_{N-1} - f_N u_N + f_N^+ u_{N+1} + \\ & + 3Q_{N+1} a_N + 3Q_N b_N + 2\Theta_{N+1} f_N^+ - 2\Theta_N f_N^- \end{aligned}$$

Gadījumam $\lambda_0 = 0$ ($\lambda_1 = 0$) ir speciālas formulas koeficientiem a_0 un b_N : $a_0 = b_N = 1$.

Līdzīgi kā iepriekš var dot koeficientu atklātas izteiksmes caur papildus matricu beta:

$$e_i = \gamma_i^{(0)} f_0^- u_{-1} + \gamma_i^{(1)} f_N^+ u_{N+1} + \sum_{j=0}^N \beta_{i,j} u_j, \quad i = \overline{0, N}. \quad (1.12)$$

Koeficienti reprezentācijā (12) tiek noteikti no trijām vienādojumu sistēmām.

a) Sistēma $\gamma_i^{(0)}$:

$$\begin{cases} (1 + a_0 + b_0)\gamma_0^{(0)} + b_0\gamma_1^{(0)} = 1 \\ a_i\gamma_{i-1}^{(0)} + (1 + a_i + b_i)\gamma_i^{(0)} + b_i\gamma_{i+1}^{(0)} = \\ = 0, \quad i = \overline{1, N-1} \\ a_N\gamma_{N-1}^{(0)} + (1 + a_N + b_N)\gamma_N^{(0)} = 0 \end{cases} \quad (1.13_0)$$

b) Sistēma koeficientiem $\gamma_i^{(1)}$:

$$\begin{cases} (1 + a_0 + b_0)\gamma_0^{(1)} + b_0\gamma_1^{(1)} = 0 \\ a_i\gamma_{i-1}^{(1)} + (1 + a_i + b_i)\gamma_i^{(1)} + b_i\gamma_{i+1}^{(1)} = \\ = 0, \quad i = \overline{1, N-1} \\ a_N\gamma_{N-1}^{(1)} + (1 + a_N + b_N)\gamma_N^{(1)} = 1 \end{cases} \quad (1.13_1)$$

c) Beidzot, $N + 1$ vienādojumu sistēma ($j = \overline{0, N}$) koeficientu sistēmai β_{ij} :

$$\begin{cases} (1 + a_0 + b_0)\beta_{0,j} + b_0\beta_{1,j} = \\ = -f_0\delta_{0,j} + f_0^+\delta_{1,j} \\ a_i\beta_{i-1,j} + (1 + a_i + b_i)\beta_{i,j} + b_i\beta_{i+1,j} = \\ = f_j^-\delta_{i-1,j} - f_j\delta_{i,j} + f_j^+\delta_{i+1,j}, \quad i = \overline{1, N-1} \\ a_N\beta_{N-1,j} + (1 + a_N + b_N)\beta_{N,j} = \\ = f_N^-\delta_{N-1,j} - f_N\delta_{N,j} \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\text{Šeit } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Kopā ar doktoranti Solvitu Kostjukovu tātad izstrādāts integrālais paraboliskais splains pārtrauktai un gabaliem gludai funkcijai. Par šo pētījumu interesi izrādīja ASV profesors Siavašs Sohrabs, jo šāds splains piemērots triecienviļņu analīzei.

II. Mēs apskatām IPS lietošanu siltuma pārnesei ar konvekcijas un siltuma pārnese palīdzību [19]. Apskatām kārtainu struktūru, sadalot procesu divās daļās: temperatūru lauks porainā vidē (pirmais vienādojums sistēmā (1)) un temperatūra slānī un porainās vides matricai slānī. Tātad ar konservatīvās viduvēšanas palīdzību iegūstam sistēmu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a_1^2(x, y) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_2^2(x, y) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad x \neq x^{(k)}, y, t > 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= a_k^2(x, y) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\beta_k^+}{2} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x^{(k)+0}} - \frac{\beta_k^-}{2} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x^{(k)-0}} - w_k \frac{\partial T}{\partial y} + \alpha_k (\Theta_k - T), \\ x &= x^{(k)}, y, t > 0, \\ \frac{\partial \Theta_k}{\partial t} &= b_k^2(x, y) \frac{\partial^2 \Theta_k}{\partial y^2} - w_k^0 \frac{\partial \Theta_k}{\partial x} + \alpha_k^0 (T - \Theta_k), \quad \Theta_k \Big|_{y=0} = \Theta_k^1(t), \\ T \Big|_{t=0} &= T^0(x, y), \quad \Theta_k \Big|_{t=0} = \Theta_k^0(y), \quad T \Big|_{x=x_1^{(k)}, y=0} = T_k^1(t), \quad T \Big|_{x \neq x_1^{(k)}, y=0} = T^1(x, t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Mēs izmantojam iepriekšējā punktā iegūto IPS formā:

$$S(x) = u_i + m_i(x - \bar{x}_i) + e_i \left[\frac{(x - \bar{x}_i)^2}{k_i H_i} - \frac{G_i}{12} \right], \quad \bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad G_i = \frac{H_i}{k_i} > 0 \quad (2.2)$$

$$u_i = H_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} U(x) dx, \quad H_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = \overline{0, N} \quad (2.3)$$

$$k_{i-1} U'(x_i - 0) + \frac{Q_i}{2} = k_i U'(x_i + 0) - \frac{Q_i}{2} \quad (2.4)$$

$$U(x_i - 0) + \frac{\Theta_i}{2} = U(x_i + 0) - \frac{\Theta_i}{2}, \quad i = \overline{1, N} \quad (2.5)$$

Īsi dosim piemēru konservatīvās viduvēšanas metodes izmantošanai vienas dimensijas siltuma vadīšanas vienādojumam:

$$c_i \frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x} \right) + F_i(x, t), \quad x_i < x < x_{i+1}, i = \overline{0, N}, x_0 = a, x_{N+1} = b, t \in (0, T], \quad (2.6)$$

$$U_{i-1}(x_i - 0) = U_i(x_i + 0), k_{i-1} \frac{\partial U_{i-1}(x_i - 0)}{\partial x} = k_i \frac{\partial U_i(x_i + 0)}{\partial x}, \quad (2.7)$$

$$-v_0 k_0 \frac{\partial U_0(a)}{\partial x} + \lambda_0 U_0(a) = \Phi_0(t), v_1 k_N \frac{\partial U_N(b)}{\partial x} + \lambda_N U_N(b) = \Phi_1(t), \quad (2.8)$$

$$U_i(x, 0) = U_i^0(x). \quad (2.9)$$

Viduvētā vērtība $u_i(t)$:

$$u_i(t) = \frac{1}{H_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} U_i(x, t) dx, \quad H_i = x_{i+1} - x_i, i = \overline{0, \dots, N}.$$

Gala rezultātā iegūstam:

$$c_i \frac{du_i}{dt} = \frac{2}{H_i} \left[\sum_{j=0}^N \beta_{ij} u_j + \gamma_i^{(0)} f_0^- u_{-1} + \gamma_i^{(1)} f_N^+ u_{N+1} \right] + f_i(t), i = \overline{0, N}, t \in (0, T]. \quad (2.10)$$

Ja apskatām sistēmu stieņi ar starpstieņiem, tad formulējums ir šāds. Pamatstieņiem:

$$\tilde{c}_i \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{k}_i \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial x} \right) - q_i(t) \tilde{U}_i + F_i(x, t), \quad (2.11)$$

$$x_i < x < x_{i+1/2}, i = \overline{0, N}, x_0 = a, x_{N+1/2} = x_{N+1} = b, t \in (0, T].$$

Vienādojumi starpstieņiem:

$$c_{i-1/2} \frac{\partial U_{i-1/2}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{i-1/2} \frac{\partial^2 U_{i-1/2}}{\partial x} \right) - q_{i-1/2} U_{i-1/2} \quad (2.12)$$

$$+ F_{i-1/2}(x, t), \quad x_{i-1/2} < x < x_i, i = \overline{1, N}.$$

Saistības nosacījumi uz stieņi un starpstieņi virsmas punktos $x_i, x_{i-1/2}$:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{i-1}(x_{i-1/2} - 0) &= U_{i-1/2}(x_{i-1/2} + 0), \\ U_{i-1/2}(x_i - 0) &= \tilde{U}_i(x_i + 0), i = 1, N,\end{aligned}\quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{i-1} \frac{\partial \tilde{U}_{i-1}(x_{i-1/2} - 0)}{\partial x} &= k_{i-1/2} \frac{\partial U_{i-1/2}(x_{i-1/2} + 0)}{\partial x}, \\ k_{i-1/2} \frac{\partial U_{i-1/2}(x_i - 0)}{\partial x} &= \tilde{k}_i \frac{\partial \tilde{U}_i(x_i + 0)}{\partial x}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Visbeidzot, izrakstam RN (11) malējiem stienīšiem un sākuma nosacījumus (16):

$$\begin{aligned}-v_0 k_0 \frac{\partial U_0(a)}{\partial x} + \lambda_0 U_0(a) &= \Phi_0(t), \\ v_1 k_N \frac{\partial U_N(b)}{\partial x} + \lambda_1 U_N(b) &= \Phi_1(t),\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$\tilde{U}_i(x, 0) = \tilde{U}_i^0(x), U_{i-1/2}(x, 0) = U_{i-1/2}^0(x). \quad (2.16)$$

Kā redzams, vienādojuma koeficientiem ir pārtraukumi $2N$ iekšējos punktos $x_i, x_{i-1/2}, i = 1, \dots, N$. Tehniskās (dabiskās) sistēmās bieži izpildās šādas nevienādības:

$$k_{i-1/2} \ll \min(k_{i-1}, k_i), i = 1, N, x_i - x_{i-1/2} = H_{i-1/2} < \min(\tilde{H}_{i-1}, \tilde{H}_i).$$

Tādos gadījumos matemātiskajos modeļos pieņem, ka starpslāņos var ielikt lineāru attiecībā pret x .

Problēmas (11)-(16) atrisinājums ir nepārtraukta taisnstūrī $\{x \in [a, b]\} \otimes \{t \in [0, T]\}$ funkcija:

$$U(x, t) = \begin{cases} \tilde{U}_i(x, t), & \text{ja } x \in (x_i, x_{i+1/2}), i = \overline{0, N}, \\ U_{i-1/2}(x, t), & \text{ja } x \in (x_{i-1/2}, x_i), i = \overline{1, N}. \end{cases}$$

Integrētās pret argumentu x vidējās vērtības $\tilde{u}_i(t)$ saskaņā ar VIPS īpašību definē šādi:

$$\tilde{u}_i(t) = \frac{1}{H_i} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \tilde{U}_i(x, t) dx, \tilde{H}_i = x_{i+1/2} - x_i, i = \overline{0, N}.$$

Integrējot pamatvienādojumu (11), iegūstam:

$$\tilde{c}_i \frac{d\tilde{u}_i}{dt} = \frac{\tilde{k}_i}{H_i} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x} \Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1/2}} - q_i(t) \tilde{u}_i + f_i(t), f_i(t) = \frac{1}{H_i} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} F_i(x, t) dx. \quad (2.17)$$

Šī vienādība (17) ir precīza. Tagad labās puses pirmo locekli aizvietojam ar splaina atvasinājumu:

$$\left. \frac{\tilde{k}_i}{\tilde{H}_i} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x} \right|_{x=x_i}^{x=x_{i+1/2}} \approx \left. \frac{\tilde{k}_i}{\tilde{H}_i} \frac{dS}{dx} \right|_{x=x_i}^{x=x_{i+1/2}} = \frac{2\tilde{e}_i}{\tilde{H}_i}. \quad (2.18)$$

Reprezentācijas ievietošana vienādojumā (18) dod vienādojumu:

$$\left. \frac{\tilde{k}_i}{\tilde{H}_i} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x} \right|_{x=x_i}^{x=x_{i+1/2}} \approx \frac{2}{\tilde{H}_i} \left[\sum_{j=0}^N \tilde{\beta}_{ij} \tilde{u}_j + \tilde{\gamma}_i^{(0)} \tilde{f}_0^- \tilde{u}_{-1} + \tilde{\gamma}_i^{(1)} \tilde{f}_N^+ \tilde{u}_{N+1} \right]. \quad (2.19)$$

Šo izteiksmi ievietojam formulā (17) un iegūstam vienādojumu kopā ar viduvēto sākuma nosacījumu:

$$\tilde{c}_i \frac{d\tilde{u}_i}{dt} = \frac{\tilde{k}_i}{\tilde{H}_i} \left[\sum_{j=0}^N \tilde{\beta}_{ij} \tilde{u}_j + \tilde{\gamma}_i^{(0)} \tilde{f}_0^- \tilde{u}_{-1} + \tilde{\gamma}_i^{(1)} \tilde{f}_N^+ \tilde{u}_{N+1} \right] - q_i(t) \tilde{u}_i + f_i(t), \quad (2.20)$$

$$\tilde{u}_i(0) = \frac{1}{\tilde{H}_i} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \tilde{U}_i^0(x) dx.$$

Šīs Košī problēmas atrisinājums parasto diferenciālvienādojumu sistēmai (analītiski vai skaitliski) funkcijas $\tilde{u}_i(t), i = \overline{0, N}$. Tas atļauj atrast no vispārinātā IPS (VIPS) reprezentācijas un formulām visus koeficientus \tilde{e}_i, \tilde{m}_i , un rekonstruēt atrisinājumu $\tilde{U}_i(x, t), i = \overline{0, N}$ elementārajiem stienīšiem.

Vienkāršākais veids, kā atrast atrisinājumu starpstienīšiem, ir izmantot linearitātes pieņēmumu. Iegūstam:

$$U_{i-1/2}(x, t) = \tilde{U}_{i-1}(x_{i-1/2}, t) \frac{x_i - x}{H_{i-1/2}} + \tilde{U}_i(x_i, t) \frac{x - x_{i-1/2}}{H_{i-1/2}}.$$

VIPS definīcija dod:

$$u_{i-1/2}^{(1)}(t) = \frac{\tilde{U}_{i-1}(x_{i-1/2}, t) + \tilde{U}_i(x_i, t)}{2}.$$

Otra iespēja ir vienādojuma (12) integrēšana x - virzienā:

$$c_{i-1/2} \frac{du_{i-1/2}}{dt} = \left. \frac{k_{i-1/2}}{H_{i-1/2}} \frac{\partial U_{i-1/2}}{\partial x} \right|_{x=x_{i-1/2}}^{x=x_i} - q_{i-1/2} u_{i-1/2} + f_{i-1/2}(t),$$

t.i.

$$c_{i-1/2} \frac{du_{i-1/2}^{(2)}}{dt} + q_{i-1/2} u_{i-1/2}^{(2)} = f_{i-1/2}(t),$$

$$u_{i-1/2}^{(2)}(0) = u_i^0 = \frac{1}{H_{i-1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} U_{i-1/2}^0(x) dx.$$

Atšķirība starp abām pieejām $\left| u_{i-1/2}^{(1)}(t) - u_{i-1/2}^{(2)}(t) \right|$ parāda kļūdas lielumu konservatīvās viduvēšanas metodei problēmai.

Divu dimensiju problēmas redukcija uz vienas telpas koordinātes problēmu. Doti vienādojumi:

$$c_1^k \frac{\partial U_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^k \frac{\partial U_k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{22}^k \frac{\partial U_k}{\partial y} \right) + \alpha_{k,1} (V_k - U_k) / (1 - m_k) + \Phi_k(x, y, t),$$

$$c_2^k \frac{\partial V_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_{11}^k \frac{\partial V_k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_{22}^k \frac{\partial V_k}{\partial y} \right) + \frac{\alpha_{k,2}}{m_k} (U_k - V_k) + \Gamma_k(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial y} (w_{k,2} V_k).$$

(2.21)

Mēs izmantosim oriģinālo konservatīvās viduvēšanas metodi un tādēļ definēsim vidējās integrālās vērtības:

$$u_k(x, t) = H_k^{-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} U_k(x, y, t) dy, v_k(x, t) = H_k^{-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} V_k(x, y, t) dy. \quad (2.21)$$

Integrējam 2-D diferenciālvienādojumu (21) y – virzienā. Nākamais solis ir funkciju $U_k(x, y, t)$ un $V_k(x, y, t)$ aproksimācija ar integrālo parabolisko splainu y – virzienā. Kā tas tika parādīts iepriekš, splaina konstrukcija reducējas uz tā koeficientu $e_k^{(u)}, k = 0, \dots, N$ (indekss (u) atspoguļo tā saistību ar funkciju $U_k(x, y, t)$). Līdzīgi kā iepriekš iegūstam:

$$c_1^k \frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^k \frac{\partial u_k}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_{k,1}}{1 - m_k} (v_k - u_k) + \varphi_i(x, t)$$

$$+ \frac{2}{H_k} \left[\sum_{j=0}^N \beta_{ij}^{(u)} u_j + \gamma_i^{(0,u)} f_0^- u_{-1} + \gamma_i^{(1,u)} f_N^+ u_{N+1} \right].$$

Līdzīgā veidā tiek transformēts diferenciālvienādojums un gala rezultātā no diviem 2-D vienādojumiem iegūstam 1-D sistēmu konstantiem koeficientiem:

$$c_2^k \frac{\partial v_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_{11}^k \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) + \frac{2}{H_k} \left[\sum_{j=0}^N \beta_{ij}^{(v)} v_j + \gamma_i^{(0,v)} f_0^- v_{-1} + \gamma_i^{(1,v)} f_N^+ v_{N+1} \right]$$

$$+ \frac{\alpha_{k,2}}{m_k} (u_k - v_k) + H_k^{-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \Gamma_k(x, y, t) dy - \frac{\partial}{\partial y} (w_{k,2} v_k).$$

Iegūto sistēmu var risināt ar matricu faktorizācijas metodi.

Sadarbībai ar fiziķu grupu strādāja R. Viļums, kurš apguva fiziķu atvērtā koda paketi un centās to izmantot elektrisko drošinātāju problēmai. Kā jau atzīmēts, viņš 2010. gada decembra mēnesī aizstāvēja matemātikas doktora grādu.

Dažādu matemātisko modeļu skaitliskā realizācija ar galīgo tilpumu metodi atvērtā pirmkoda programmā OpenFOAM, kā arī ar konservatīvo viduvēšanas metodi iegūto modeļu realizācija ar galīgo elementu metodi; rezultātu salīdzināšana.

Automašīnu drošinātāja matemātisko modeļu skaitliskie aprēķini un savstarpējs salīdzinājums; cilindriskas un paralēlskaldņu ģeometrijas. Drošinātāju elementa matemātiskā modeļa izstrāde un aprēķini tā uzkaršanai un pārdegšanai, ņemot vērā kušanas latentu enerģiju.

Atvērtā pirmkoda programmu paketes „OpenFOAM” mācību aprakstu veidošana latviešu valodā. No temperatūras atkarīgu, laikā mainīgu 3. veida (Robina) robežnosacījumu realizācija programmā OpenFOAM.

R. Viļums pilnveidoja OpenFOAM 2.0 harmoniskās interpolācijas aprēķinu pirmkodu pēc OpenFOAM Extend 1.6-ext projekta jaunākā parauga, un to kompilēja. Izveidoja skaitliskā testa piemēru, veica tā aprēķinus un salīdzināja tā rezultātus starp harmoniskās un lineārās interpolācijas izmantošanu, kā arī ar rezultātiem no stacionārā analītiski iteratīvā matemātiskā modeļa, kas realizēts programmā Maple. Veicot izvedumus, pārliccinājās, ka modificētā harmoniskās interpolācijas pirmkoda izmantošana programmā OpenFOAM ortogonāla režģa un mainīga siltuma vadīšanas koeficienta gadījumā realizē siltuma plūsmas un temperatūras nepārtrauktību starp slāņiem Laplasa operatora diskretizācijā. Rakstīja aprakstu par harmoniskā vidējā izmantošanu un realizāciju.

Pedalīšanās 6. starptautiskajai konferencē „Baltic Heat Transfer Conference” (BHTC), kas notika Somijas pilsētā Tampērē, ar referātu „Comparison of Conservative Averaging and Finite Volume Methods in Mathematical Models of Automotive Fuses” un konferencē „Multiphysical Modelling in OpenFOAM” Rīgā ar referātu „Implementation of Transient Robin Boundary Conditions in OpenFOAM”.

Pilnveidoja saplākšņa matemātiskā modeļa realizāciju programmā OpenFOAM, ievadu funkcijas un koeficientus, meklēja informāciju par trūkstošajiem koeficientiem. Veica testa aprēķinus un analizēja rezultātus. Meklēja un pētīja publikācijas par saplākšņiem un koksni, to struktūru un fizikālajām īpatnībām. Meklēja publikācijas un noskaidroju koksnes siltumietilpības, blīvuma un siltuma vadāmības aprēķināšanas formulas, ko ievadu iepriekš iesāktajā OpenFOAM risinātāja programmas pirmkodā. Veica izvedumus, lai salīdzinātu ar matemātisko modeli, kas piedāvāts Cepīša u.c. (2001), Buiķa u.c. (2008) un Didrihsones (2010) publikācijās. Izveidotas animācijas vairākiem OpenFOAM programmai līdzī nākošajiem matemātisko modeļu piemēriem (shallowWaterFoam/ squareBump, settlingFoam/ras: tank3D un dahl; twoLiquidMixingFoam/ lockExchange), kas iepriekš tika aprēķināti.

Turpinās darbs ar koksnes un saplākšņu matemātiskajiem modeļiem.

Pilnveidots OpenFOAM risinātājas programmas pirmkods, veikta tās kompilācija. Sagatavots piemērs ar diviem slāņiem, kam dažāds sākotnējais mitruma saturs. Veikta vairāku siltuma un masas pārnese procesu aprēķinus: vispirms tiek ņemta vērā tikai siltuma difūzija, pēc tam pievienota piesaistītā mitruma difūzija, kā arī ūdens tvaika plūsma. Laplasa operatora diskretizācijā tiek izmantota gan lineārā, gan harmoniskā vadītspējas koeficienta aproksimācija. Aprēķinu rezultātus salīdzina savā starpā. Papildina saplākšņa modeļa OpenFOAM aprēķināšanas piemēru ar papildus diviem slāņiem, veica aprēķinus pie dažādiem nosacījumiem, salīdzina rezultātus.

III. Liela uzmanība tika veltīta arī sistēmām ar vienu vai pat divām ribām. Šo daļu veica M. Lencmane, M. Buiķe un A. Buiķis. Priekšstatam aprakstam problēmas formulējumu un

atrisinājuma iegūšanu sistēmai ar divām ribām. Pieņemsim arī ka visa sistēma sastāv no viena materiāla, tātad $k = k_0 = k_1$. Līdz ar to paliek tikai divi Bio skaitļi

$$\beta = \beta_{21} = \beta_{22} = \beta_{23} = \frac{h \cdot (B + R)}{k}; \quad \beta_0 = \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = \frac{h_0 \cdot (B + R)}{k}.$$

Šajā vienkāršotā gadījumā galvenās sienas temperatūras $U_0(x, y)$, labās ribas temperatūras $U(x, y)$ un kreisās ribas temperatūras $U_1(x, y)$ vienādojumi ir:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0, \quad \{x \in [0, \delta], y \in [0, 1]\}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \{x \in [\delta, \delta + l], y \in [0, b]\}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \quad \{x \in [-l_1, 0], y \in [0, b]\}, \quad (3.3)$$

Tā kā sānu plūsmu mēs neņemam vērā, tad daži robežnosacījumi kļūst homogēni:

$$\left. \frac{\partial U_0}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial U_0}{\partial y} \right|_{y=1} = \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial U_1}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (3.4)$$

Pārējie robežnosacījumi vienkāršojas

$$\left. \frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta_0 [1 - U_0] \right|_{x=0} = 0, \quad y \in (b, 1) \quad (3.5)$$

$$\left. \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta U_0 \right) \right|_{x=\delta} = 0, \quad y \in (b, 1) \quad (3.6)$$

$$\left. \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \beta U \right) \right|_{x=\delta+l} = 0, \quad y \in [0, b] \quad (3.7)$$

$$\left. \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} + \beta U \right\} \right|_{y=b} = 0, \quad x \in [\delta, \delta + l] \quad (3.8)$$

$$\left. \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \beta_0 [1 - U_1] \right) \right|_{x=-l_1} = 0, \quad y \in [0, b] \quad (3.9)$$

$$\left\{ \frac{\partial U_1}{\partial y} + \beta_0 [U_1 - 1] \right\} \Big|_{y=b} = 0, \quad x \in [-l_1, 0]. \quad (3.10)$$

Saistības nosacījumi starp sienu un labo ribu funkcijām $U_0(x, y)$ un $U(x, y)$ ir formā:

$$U_0 \Big|_{x=\delta-0} = U \Big|_{x=\delta+0}, \quad \frac{\partial U_0}{\partial x} \Big|_{x=\delta-0} = \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=\delta+0}. \quad (3.11)$$

Nosacījumu (3.11), un robežnosacījumu (3.8) lineāra kombinācija dod mums iespēju pārrakstīt tos, ka sekojošo robežnosacījumu sienas labajai pusei, kur $x = \delta$:

$$\left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta U_0 \right) \Big|_{x=\delta-0} = F_0(\delta, y), \quad F_0(\delta, y) = \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \beta U, & 0 \leq y \leq b \\ 0, & b \leq y \leq 1 \end{cases}.$$

Saistības nosacījumi starp sienu un kreiso ribu funkcijām $U_1(x, y)$ un $U_0(x, y)$ ir pārrakstāmi formā:

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta_0 U_0 \Big|_{x=0+0} = F_1(0, y), \quad F_1(0, y) = \begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \beta_0 U_1, & 0 \leq y \leq b \\ -\beta_0, & b \leq y \leq 1 \end{cases}, \quad (3.12)$$

Ja mēs pieņemsim, ka funkcijas $F_0(x, y), F_1(x, y)$ ir zināmas, tad temperatūras sadalījumu sienai varam uzrakstīt ar Grīna funkcijas palīdzību:

$$U_0(x, y) = - \int_0^1 F_1(0, \nu) G_0(x, y, 0, \nu) d\nu + \int_0^b F_0(\delta, \nu) G_0(x, y, \delta, \nu) d\nu \quad (3.13)$$

Kur Grīna funkcija ir:

$$G_0(x, y, \zeta, \nu) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{G_{0,m}^x(x, \zeta) \cdot G_{0,n}^y(y, \nu)}{[(\pi \cdot n)^2 + \mu_m^2]}$$

$$G_{0,m}^x = \frac{\varphi_{0,m}(x)\varphi_{0,m}(\zeta)}{\|\varphi_{0,m}\|^2}$$

$$G_{0,n}^y = \cos[n\pi(y + \nu)] + \cos[n\pi(y - \nu)], \quad \varphi_{0,m}(x) = \cos(\mu_m x) + \frac{\beta_0}{\mu_m} \sin(\mu_m x)$$

$$\|\varphi_{0,m}\|^2 = \frac{\beta_0}{2\mu_m^2} + \frac{\beta}{2\mu_m^2} \frac{\mu_m^2 + (\beta_0)^2}{\mu_m^2 + (\beta)^2} + \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{\beta_0^2}{\mu_m^2} \right)$$

kur μ_m ir sekojoša transcendentā vienādojuma saknes

$$\operatorname{tg}(\mu_m \delta) = \frac{\mu_m(\beta_0 + \beta)}{\mu_m^2 - \beta_0 \beta}$$

Diemžēl mēs nevaram lietot atrisinājumu (13), jo funkcijas $F_0(x, y)$ un $F_1(x, y)$ nav zināmas, jo nav zināmas funkcijas $U(x, y)$ un $U_1(x, y)$. Tāpēc tagad pievērsīsim mūsu uzmanību atrisinājumam, kas pieraksta temperatūras sadalījumu ribās. Līdzīgi kā iepriekš nosacījumu lineāra kombinācija dod mums iespēju pārrakstīt tos, ka sekojošo robežnosacījumu sienas labajai pusei, kur

$$\left. \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \beta U \right) \right|_{x=\delta+0} = F(\delta, y), \quad F(\delta, y) = \frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta U_0, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Līdzīgi, ka sienai, atrisinājums temperatūras sadalījumam labā ribā ir:

$$U(x, y) = - \int_0^b F(\delta, \eta) G(x, y, \delta, \eta) d\eta,$$

Kur atkal ietilpst Grīna funkcija. Līdzīgi ir ar kreiso ribi. Tad trīs robežnosacījumi vairs nav homogēni (homogēns paliek tikai simetrijas nosacījums). Robežnosacījums uz kreisas ribas kreisas malas:

$$\left. \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \beta_0 U_1 \right) \right|_{x=-l_1} = -\beta_0, \quad y \in [0, b],$$

Kā arī robežnosacījums uz kreisas ribas augšējās malas:

$$\left. \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \beta_0 U_1 \right) \right|_{y=b} = \beta_0, \quad x \in [-l_1, 0]$$

Nosacījumu lineāra kombinācija dod mums iespēju uzrakstīt robežnosacījumu kreisajai ribai sekojoši:

$$\left. \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \beta_0 U_1 \right) \right|_{x=0+0} = F_2(0, y), \quad F_2(0, y) = \frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta U_0, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Ņemot vērā visus robežnosacījumus atrisinājumu kreisai ribai iegūsim sekojošā izskatā:

$$U_1(x, y) = \beta_0 \int_0^b G_1(x, y, -l_1, \nu) d\nu + \int_0^b F_2(0, \nu) G_1(x, y, 0, \nu) d\nu - \beta_0 \int_{-l_1}^0 G_1(x, y, \xi, b) d\xi, \quad (3.14)$$

$$G_1(x, y, \xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{G_m^{(x)}} \frac{G_{1,i}^{(x)}(x, \xi) \cdot G_{1,j}^{(y)}(y, \eta)}{\mu_i^2 + \lambda_j^2}, \quad G_{1,i}^{(x)}(x, \xi) = \frac{\varphi_{1,i}(x) \varphi_{1,i}(\xi)}{\|\varphi_{1,i}\|^2},$$

$$G_{1,j}^{(y)}(y, \eta) = \frac{\psi_{1,j}(y, \eta)}{2 \|\psi_{1,j}\|^2}, \quad \varphi_{1,i}(x) = \cos[\mu_i(x + l_1)] + \frac{\beta_0}{\mu_i} \sin[\mu_i(x + l_1)].$$

$$\|\varphi_{1,i}\|^2 = \frac{\beta_0}{\mu_i^2} + \frac{l_1}{2} \left(1 + \frac{\beta_0^2}{\mu_i^2} \right), \quad \psi_{1,j}(y) = \cos[\lambda_j(y - \eta)] + \cos[\lambda_j(y + \eta)],$$

$$\|\psi_{1,j}\|^2 = \frac{1}{2} \left(b + \frac{\beta_0}{\lambda_j^2 + \beta_0^2} \right).$$

Kur μ_i, λ_j ir sekojošo transcendentu vienādojumu saknes

$$\operatorname{tg}(\mu_i l_1) = \frac{2\mu_i \beta_0}{\mu_i^2 - \beta_0^2}, \quad \operatorname{tg}(\lambda_j b) = \frac{\beta_0}{\lambda_j}.$$

Tagad nointegrēsim integrāļus atrisinājumā (3.14), kas ir atkarīgi tikai no Grīna funkcijām un apzīmēsim iegūtos lielumus ar funkcijām no y , jo tās ir zināmas.

$$\beta_0 \int_0^b G_1(x, y, -l_1, \nu) d\nu = \beta_0 \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{G_{1,i}^{(x)}(x, -l_1)}{(\mu_i^2 + \lambda_j^2) 2 \|\psi_{1,j}\|^2} \cdot \frac{1}{\lambda_j} \left[2 \sin(\lambda_j b) \cdot \cos\left(\frac{\lambda_j y}{2}\right) \right] = C_1(y)$$

$$\beta_0 \int_{-l_1}^0 G_1(x, y, \xi, b) d\xi = \beta_0 \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{G_{1,j}^{(x)}(y, b) \cdot \varphi_{1,i}(x)}{(\mu_i^2 + \lambda_j^2) \cdot \|\varphi_{1,i}\|^2} \frac{1}{\mu_i} \left(\sin(\mu_i l_1) - \frac{\beta_0}{\mu_i} (\cos(\mu_i l_1) - 1) \right) = C_2(y)$$

Ievedot vēl apzīmējumu $\tilde{C}(y) = C_1(y) - C_2(y)$ temperatūras sadalījumu kreisā ribā varam izteikt pavisam vienkāršā formā:

$$U_1(x, y) = \int_0^b F_2(0, \nu) G_1(x, y, 0, \nu) d\nu + \tilde{C}(y). \quad (3.14)$$

Tātad, lai atrastu atrisinājumus, vajag uzzināt funkcijas $F(\delta, \eta)$, $F_0(\delta, \eta)$, $F_1(0, y)$, $F_2(0, \eta)$. Bet pietiekoši zināt tikai divas no tām, jo zinot $F(\delta, \eta)$, no mēs atrodam arī $F_0(\delta, \eta)$ un līdzīgi atrodot $F_2(0, y)$, no atrodam arī $F_1(0, y)$. Lai atrastu $F(\delta, \eta)$, paņemsim atrisinājumu punktā (δ, η) un pārveidosim sakarības. Līdz ar to iegūsim Fredholma integrālo vienādojumu funkcijai $F(\delta, \eta)$:

$$F(\delta, y) = -2\beta \int_0^b F(\delta, \eta) \cdot G_x(\delta, y, \delta, \eta) d\eta. \quad (3.15)$$

$$\text{Šeit } G_x(\delta, y, \delta, \eta) = \sum_{i,j=1}^{G_m^{(x)}} \frac{\phi_i(\xi) \cdot G_j^{(y)}(y, \eta)}{(\lambda_i^2 + k_j^2) \|\phi_i\|^2}.$$

Līdzīgi varam atrast funkciju $F_2(0, y)$. Līdz ar to iegūsim Fredholma integrālo vienādojumu funkcijai $F_2(0, y)$:

$$F_2(0, y) = \int_0^b F_2(0, \nu) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta_0 \right) G_1(0, y, 0, \nu) d\nu + \tilde{D}(y). \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}(y) = & \beta_0 \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{(-\mu_i \sin(\mu_i l_1) + \beta_0 \cos(\mu_i l_1))}{(\mu_i^2 + \lambda_j^2) \|\phi_{1,i}\|^2 2 \|\psi_{1,j}\|^2} \cdot \frac{1}{\lambda_j} \left[2 \sin(\lambda_j b) \cdot \cos\left(\frac{\lambda_j y}{2}\right) \right] \\ & - \beta_0 \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{(-\mu_i \sin(\mu_i l_1) + \beta_0 \cos(\mu_i l_1)) G_{1,j}^{(y)}(y, b)}{(\mu_i^2 + \lambda_j^2) \|\phi_{1,i}\|^2} \frac{1}{\mu_i} \left(\sin(\mu_i l_1) - \frac{\beta_0}{\mu_i} (\cos(\mu_i l_1) - 1) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kur} & + \beta_0 \beta_0 \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\left(\cos(\mu_i l_1) + \frac{\beta_0}{\mu_i} \sin(\mu_i l_1) \right)}{(\mu_i^2 + \lambda_j^2) 2 \|\psi_{1,j}\|^2 \|\phi_{1,i}\|^2} \cdot \frac{1}{\lambda_j} \left[2 \sin(\lambda_j b) \cdot \cos\left(\frac{\lambda_j y}{2}\right) \right] - \\ & - \beta_0 \beta_0 \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{G_{1,j}^{(x)}(y, b) \cdot \left(\cos(\mu_i l_1) + \frac{\beta_0}{\mu_i} \sin(\mu_i l_1) \right)}{(\mu_i^2 + \lambda_j^2) \|\phi_{1,i}\|^2} \frac{1}{\mu_i} \left(\sin(\mu_i l_1) - \frac{\beta_0}{\mu_i} (\cos(\mu_i l_1) - 1) \right) \end{aligned}$$

Izmantojot (3.16) sakarību var pierakstīt arī sekojoši:

$$F_2(0, y) = \int_0^b F_2(0, \nu) \Gamma_1(0, y, 0, \nu) d\nu + \tilde{D}(y). \quad (3.17)$$

Tādējādi izrēķinot (3.15) un (3.17) dabūsim visus nepieciešamos lielumus, lai atrastu arī pārējos nezināmos lielumus.

Vēl viena metode, kā var atrast funkcijas $F(\delta, \eta)$, $F_0(\delta, \eta)$, $F_1(0, y)$, $F_2(0, \eta)$ _ sastādot četras integrālvienādojumus. Viegli varam dabūt sekojošo vienādojumu:

$$F_0(x, y) = - \int_0^b F(\delta, \eta) \cdot \Gamma(x, y, \delta, \eta) d\eta \quad (3.18)$$

$$\text{kur } \Gamma(x, y, \xi, \eta) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta \right) G(x, y, \xi, \eta).$$

Līdzīgi iegūsim $F(\delta, y)$:

$$F(\delta, \eta) = \int_0^1 F_1(0, \eta) \Gamma_0(\delta, \eta, 0, \nu) d\nu - \int_0^b F_0(\delta, \eta) \Gamma_0(\delta, \eta, \delta, \nu) d\nu \quad (3.19)$$

$$\text{kur } \Gamma_0(x, y, \zeta, \nu) = \left(\beta + \frac{\partial}{\partial x} \right) G_0(x, y, \zeta, \nu).$$

Iegūsim $F_1(0, y)$:

$$F_1(0, y) = \beta \int_0^b \Gamma_1(0, y, \zeta, \nu) d\nu - \beta \int_{-l_1}^0 \Gamma_1(0, y, \zeta, \nu) d\xi + \int_0^b F_2(0, \nu) \Gamma_1(0, y, \zeta, \nu) d\nu$$

Tagad mums atliek izteikt $F_2(0, y)$:

$$F_2(0, y) = - \int_0^1 F_1(0, \nu) \Gamma_2(0, y, \zeta, \nu) d\nu + \int_0^b F_0(\delta, \nu) \Gamma_2(\delta, y, \zeta, \nu) d\nu,$$

$$\text{kur } \Gamma_2(x, y, \zeta, \nu) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta_0 \right) G_0(x, y, \zeta, \nu).$$

Galvenās sienas temperatūras $U_0(x, y)$, labās ribas temperatūras $U(x, y)$ un kreisās ribas temperatūras $U_1(x, y)$ vienādojumi ir:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0, \{x \in [0, \delta], y \in [0, 1]\}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \{x \in [\delta, \delta + l], y \in [0, b]\}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \{x \in [-l_1, 0], y \in [0, b]\}. \quad (26)$$

Robežnosacījumi ir homogēni un nehomogēni:

$$\left. \frac{\partial U_0}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial U_0}{\partial y} \right|_{y=1} = \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial U_1}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (27)$$

$$\left. \frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta_0 [1 - U_0] \right|_{x=0} = 0, y \in (b, 1) \quad (28)$$

$$\left. \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta U_0 \right) \right|_{x=\delta} = 0, y \in (b, 1) \quad (29)$$

$$\left. \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \beta U \right) \right|_{x=\delta+l} = 0, y \in [0, b] \quad (30)$$

$$\left. \left\{ \frac{\partial U}{\partial y} + \beta U \right\} \right|_{y=b} = 0, x \in [\delta, \delta + l] \quad (31)$$

$$\left. \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \beta_0 [1 - U_1] \right) \right|_{x=-l_1} = 0, y \in [0, b] \quad (32)$$

$$\left. \left\{ \frac{\partial U_1}{\partial y} + \beta_0 [U_1 - 1] \right\} \right|_{y=b} = 0, x \in [-l_1, 0] \quad (33)$$

Saistības nosacījumi starp sienu un labo ribu funkcijām $U_0(x, y)$ un $U(x, y)$ ir formā:

$$U_0 \Big|_{x=\delta-0} = U \Big|_{x=\delta+0} \quad (34)$$

$$\left. \frac{\partial U_0}{\partial x} \right|_{x=\delta-0} = \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=\delta+0} \quad (35)$$

Saistības nosacījumu un robežnosacījumu lineāra kombinācija dod mums iespēju pārrakstīt tos, ka sekojošo robežnosacījumu sienas labajai pusei, kur $x = \delta$:

$$\left. \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta U_0 \right) \right|_{x=\delta-0} = F_0(\delta, y), \quad F_0(\delta, y) = \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \beta U, & 0 \leq y \leq b, \\ 0, & b \leq y \leq 1 \end{cases}.$$

Līdzīgi iegūstam:

$$\left. \frac{\partial U_0}{\partial x} + \beta_0 U_0 \right|_{x=0+0} = F_1(0, y), \quad F_1(0, y) = \begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \beta_0 U_1, & 0 \leq y \leq b \\ -\beta_0, & b \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Ja mēs pieņemsim, ka funkcijas $F_0(x, y)$, $F_1(x, y)$ ir zināmas, tad temperatūra:

$$U_0(x, y) = - \int_0^1 F_1(0, \nu) G_0(x, y, 0, \nu) d\nu + \int_0^b F_0(\delta, \nu) G_0(x, y, \delta, \nu) d\nu$$

Līdzīgi, ka sienai, atrisinājums temperatūras sadalījumam labā ribā ir:

$$U(x, y) = - \int_0^b F(\delta, \eta) G(x, y, \delta, \eta) d\eta$$

Atrisinājumu kreisai ribai iegūsim sekojošā izskatā:

$$U_1(x, y) = \beta_0 \int_0^b G_1(x, y, -l_1, \nu) d\nu + \int_0^b F_2(0, \nu) G_1(x, y, 0, \nu) d\nu - \beta_0 \int_{-l_1}^0 G_1(x, y, \xi, b) d\xi$$

Iegūsim Fredholma integrālvienādojumu funkcijai $F(\delta, \eta)$:

$$F(\delta, y) = -2\beta \int_0^b F(\delta, \eta) \cdot G_x(\delta, y, \delta, \eta) d\eta$$

Fredholma integrālvienādojums funkcijai $F_2(0, y)$:

$$F_2(0, y) = \int_0^b F_2(0, \nu) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta_0 \right) G_1(0, y, 0, \nu) d\nu + \tilde{D}(y).$$

IV. Tēmas vadītāja un viņa doktorantu uzmanība lielā mērā šajā projektā ir saistīta ar tērauda rūdīšanas jaunu metodiku. Nereti matemātiskā modelī vajadzīga ne tā funkcija, kas atrodama no diferenciālvienādojuma, bet gan citi lielumi, kas tieši vai netieši saistīti ar problēmu. Piemēram, tiek apskatīta intensīvās tērauda rūdīšanas problēma, kad notiek ļoti intensīvi siltuma pārneses procesi. Mēs izmantosim hiperbolisko siltuma vadīšanas vienādojumu tērauda rūdīšanas procesa matemātiskā modeļa izveidei. Tā ir jauna pieeja un mēs šajā problemātikā esam pirmie pasaulē. Tādējādi pie klasiskā siltuma vadīšanas vienādojuma tiek pievienota hiperboliskā daļa, kas rada nepieciešamību pēc otrā sākuma nosacījuma. Tomēr praktiski mēs nevaram uzdot atdzišanas ātruma funkciju, kas ir nepieciešams, lai uzdotu sākuma nosacījumus. Tāpēc izmantosim temperatūras un tās plūsmas sadalījumu procesa

beigās. Tātad no praktiskā viedokļa nav iespējams izrēķināt tērauda rūdīšanas procesa sākuma plūsmu un to vajag atrast teorētiski, izmantojot matemātiskos modeļus.

Vienas dimensijas telpas koordinātes gadījumā dota nostādne:

$$\tau_r \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, H), t \in (0, T), H < \infty, \quad (4.1)$$

$$\left(-k \frac{\partial U}{\partial x} + hU \right) = h\Theta(t), \quad x = 0, t \in [0, T], \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad x = H, \quad (4.3)$$

$$U = U^0(x), \quad t = 0, x \in [0, H]. \quad (4.4)$$

Šeit k ir siltuma vadīšanas koeficients, c - īpatnējā siltuma ietilpība, h - siltuma apmaiņas koeficients, $a^2 = k / (c\rho)$ un ρ ir tērauda blīvums, τ_r - relaksācijas koeficients. Pilnam problēmas formulējumam nepieciešams vēl viens sākuma nosacījums:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = v_0(x), \quad x \in [0, l], t = 0. \quad (4.5)$$

No praktiskā viedokļa šis sākuma nosacījums ir nereāls: nav iespējams izmērīt temperatūras maiņu sākuma momentā un tas ir jāatrod matemātiski. Tā vietā uzdosim eksperimentāli realizējamu nosacījumu, ka beigu momentā ir dots temperatūras sadalījums:

$$U(x, T) = U_T(x), \quad x \in [0, H]. \quad (4.6)$$

Tagad izmantosim konservatīvās viduvēšanas metodi. Definējam vidējo pa argumentu x vērtību, pieņemot neatkarību pret telpas argumentu:

$$u_0(t) = H^{-1} \int_0^H U(x, t) dx. \quad (4.7)$$

No vienādojumu sistēmas (1)-(6) iegūstam šādu robežproblēmu parastajam diferenciālvienādojumam prēt jauno funkciju:

$$\tau_r \frac{d^2 u_0}{dt^2} + \frac{du_0}{dt} + \frac{h}{c_H} u_0 = \frac{h}{c_H} \Theta(t) + f(t), \quad c_H = c\rho H, \quad (4.8)$$

$$u_0(0) = u_0^0 = H^{-1} \int_0^H U^0(x) dx, \quad (4.9)$$

$$u_0(T) = u_T = H^{-1} \int_0^H U_T(x) dx. \quad (4.10)$$

Mums jāatrod lielums

$$v_0 = \frac{du_0(0)}{dt}. \quad (4.11)$$

Lai atrisinātu šo problēmu, mēs to sadalam divās apakšproblēmās:

$$u_0(t) = \bar{u}(t) + \bar{w}(t). \quad (4.12)$$

Pirmā no tām ir ar homogēnu pamatvienādojumu:

$$\tau_r \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{h}{c_H} \bar{u} = 0$$

Kopā ar nehomogēniem sākuma nosacījumiem:

$$\bar{u}(0) = u_0^0, \quad \frac{d\bar{u}(0)}{dt} = v_0.$$

Tās atrisinājums ir šāds:

$$\bar{u}(t) = \left[u_0^0 \cosh(\beta t) + v_0 \beta^{-1} \sinh(\beta t) \right] e^{-\frac{t}{2\tau_r}}. \quad (4.13)$$

Otra problēma ir ar nehomogēnu pamatvienādojumu un homogēniem sākuma nosacījumiem:

$$\tau_r \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} + \frac{d\bar{w}}{dt} + \frac{h}{c_H} \bar{w} = \frac{h}{c_H} \Theta(t) + f(t),$$

$$\bar{w}(0) = \frac{d\bar{w}(0)}{dt} = 0.$$

Atrisinājums ir formā:

$$\bar{w}(t) = e^{-\frac{t}{2\tau_r}} \int_0^t q(t-\tau) \Phi(\tau) d\tau, \quad \Phi(t) = \tau_r^{-1} [\gamma \Theta(t) + f(t)] e^{\frac{t}{2\tau_r}}, \quad \gamma = \frac{h}{c_H}.$$

Šeit $q(t)$ ir diferenciālvienādojuma atrisinājums ar speciāliem sākuma nosacījumiem:

$$q(0) = 0, \quad \frac{dq(0)}{dt} = 1,$$

tad ir $q(t) = \beta^{-1} \sinh(\beta t)$.

Tātad iegūstam, ka:

$$\bar{w}(t) = \beta^{-1} e^{-\frac{t}{2\tau_r}} \int_0^t \sinh[\beta(t-\tau)] \Phi(\tau) d\tau. \quad (4.14)$$

Tādejādi kopumā iegūstam problēmas atrisinājumu formā:

$$u_0(t) = \left[u_0^0 \cosh(\beta t) + \frac{v_0}{\beta} \sinh(\beta t) \right] e^{-\frac{t}{2\tau_r}} + \frac{e^{-\frac{t}{2\tau_r}}}{\beta \tau_r} \int_0^t \sinh[\beta(t-\tau)] [\gamma \Theta(\tau) + f(\tau)] e^{\frac{\tau}{2\tau_r}} d\tau. \quad (4.15)$$

Tagad izmantojam papildus informāciju (6) - zināmo atrisinājumu beigu momentā. Tas ļauj nepieciešamo informāciju izteikt vienkāršā un noslēgtā formā:

$$v_0 = \frac{\beta u_r e^{2\tau_r}}{\sinh(\beta T)} - \beta u_0^0 \coth(\beta T) - \tau_r^{-1} \int_0^T \frac{\sinh(\beta(T-\tau))}{\sinh(\beta T)} [f(\tau) + \gamma \Theta(\tau)] e^{\frac{\tau}{2\tau_r}} d\tau. \quad (4.16)$$

Mēs varam paaugstināt aproksimācijas kārtu ar konservatīvās viduvēšanas metodi problēmai (11)-(14) līdz otrās pakāpes polinomam:

$$U(x, t) = u_0(t) + m(t) \left(x - \frac{H}{2} \right) + \frac{e(t)}{kH} \left[\left(x - \frac{H}{2} \right)^2 - \frac{H^2}{12} \right]. \quad (4.17)$$

Nezināmos koeficientus $m(t)$, $e(t)$ mēs nosakam no robežnosacījumiem un iegūstam:

$$U(x, t) = u_0(t) + \frac{[\Theta(t) - u_0(t)]}{H \left(H + \frac{3k}{h} \right)} \left(\frac{3}{2} x^2 - 3Hx + H^2 \right).$$

Integrēšana pa intervalu $x \in [0, H]$ pamatvienādojumu iedod to pašu parasto diferenciālvienādojumu (11), atšķirība ir tikai divos koeficientos:

$$\tau_r \frac{d^2 u_0}{dt^2} + \frac{du_0}{dt} + \frac{3kh}{c_H(3k+hH)} u_0 = \frac{3kh}{c_H(3k+hH)} \Theta(t) + f(t).$$

Papildnosacījumi (12)-(14) paliek tie paši, tātad var izmantot iegūtās formulas (19), (21)-(23), aizvietojojam parametrus β, γ ar šādām izteiksmēm:

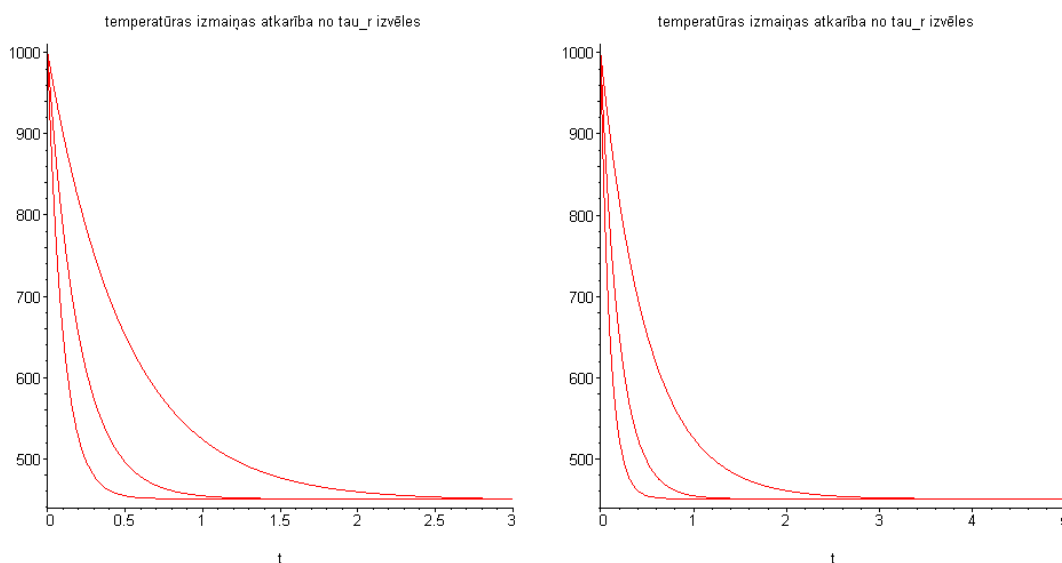
$$\beta = \frac{1}{2\tau_r} \sqrt{1 - \frac{4h\tau_r}{c_H \left(1 + \frac{hH}{3k} \right)}}, \quad \gamma = \frac{h}{c_H \left(1 + \frac{hH}{3k} \right)}. \quad (4.17)$$

Kā bija atzīmēts iepriekš, nosacījums $\frac{4h\tau_r}{c_H} < 1$ parāda šī atrisinājuma ierobežotību, aproksimējot atrisinājumu $U(x, t)$ ar konstanti. Aproksimējot funkciju $U(x, t)$ ar reprezentāciju (17), mēs iegūstam vājāku ierobežojumu:

$$\frac{4h\tau_r}{c_H} < 1 + \frac{hH}{3k}.$$

Tas, no vienas puses, ir inversās problēmas tuvinātā atrisinājuma ierobežotība. No otras puses, mēs esam ieguvuši korektas problēmas atrisinājumu slēgtā formā. Atrisinājums var tikt izmantots kā sākuma tuvinājums pilnajai problēmai vienādojumam (1) intervālā $x \in [0, H]$.

Parādīsim dažus skaitliskos rezultātus problēmai (11)-(14). Kā paraugu izmantosim tēraudu AISI 1010 ar parametriem no rokasgrāmatas [22]. Apskatam stienīti ar garumu $H = 10$. Sākuma temperatūra stienītim ir 1000°K , apkārtējās vides temperatūra ir 400°K . Uzskatām, ka materiāla beigu temperatūra ir 450°K . Praksē šādi eksperimenti nav veikti, tādēļ analizējam, kā beigu moments ietekmē modelēšanas rezultātus. Abos zīmējumos redzams, ka process ir nostabilizējies abiem laika momentiem, kuri būtiski atšķiras.



Tērauda AISI 1010 rūdīšana atkarībā no $\tau_r = 0.1; 0.2; 0.5 \text{ sek}$ un dažādiem procesa beigu momentiem ($T = 3 \text{ sek.}, T = 5 \text{ sek.}$), siltuma apmaiņas koeficients $h = 50000$.

To apstiprina arī sākuma plūsmas lielums. Ja laika momentam $T = 3$ plūsmas v_0 lielums atkarībā no $h = 10000; 25000; 50000$ bija vienāds ar $-101,59; -247,03$ un $-493,98$, tad beigu momentam $T = 5$ plūsmas ātrums nedaudz samazinājās: $-98,09;$

$-244,99$ un $-489,91$. Patiesībā siltuma plūsmas lielums ir mainījies nedaudz, samazinot laiku par gandrīz 70%. Tika analizēta arī siltuma apmaiņas koeficienta ietekme uz procesa norisi. Samazinot to desmit reizes, pēc tam vēlreiz desmit reizes, siltuma plūsmas ātrums izmainījās visai maz. Svarīgi, ka plūsmas paliek negatīvas un visai lielas. Redzams, ka relaksācijas laika iekļaušana matemātiskajā modelī dod samērā lielu negatīvu temperatūras izmaiņu sākuma momentā. Šādā nozīmē konservatīvās viduvēšanas metode izrādās ļoti vērtīga pieeja sarežģītās problēmas risināšanai.

Konservatīvās viduvēšanas metode ir izmantojama arī nelineāru robežnosacījumu gadījumā. Izmantosim to šī paragrāfa sākumā apskatītajam hiperboliskajam diferenciālvienādojumam (1) ar RN: stienīša kreisais galapunktā ir burbuļošanas RN [82], bet labajā galapunktā ir Stefana-Bolcmana robežnosacījums:

$$\tau_r \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t), x \in (0, H), t \in (0, T), H < \infty, \quad (4.18)$$

$$-k \frac{\partial U}{\partial x} + \beta_0^m [U - \Theta_0(t)]^m = 0, x = 0, t \in [0, T], \quad (4.19)$$

$$k \frac{\partial U}{\partial x} + \varepsilon_1 \sigma [U^4 - \Theta_1^4(t)] = 0, x = H, t \in [0, T],$$

$$U \Big|_{t=0} = U^0(x), x \in [0, H]. \quad (4.20)$$

Izmantosim vienkāršāko aproksimāciju problēmai: ar konstanti. Gala rezultātā iegūstam šādu parasto diferenciālvienādojumu:

$$\tau_r \frac{d^2 u_0}{dt^2} + \frac{du_0}{dt} - \frac{\varepsilon_1 \sigma}{c_H} u_0^4 - \beta_0^m [u_0 - \Theta_0(t)]^m = -\frac{\varepsilon_1 \sigma}{c_H} \Theta_1^4(t) + f(t). \quad (4.21)$$

Šis diferenciālvienādojums ir jārisina kopā ar sākuma nosacījumu un papildus nosacījumu beigu momentā:

$$u_0(0) = u_0^0, \quad u_0(T) = u_T.$$

Šādu problēmu varam risināt ar skaitlisku metodi. Pēc tam jāatrod plūsma laikā sākuma momentā:

$$v_0 = \frac{du_0(0)}{dt}.$$

Turpmāk attīstīta cita pieeja, risinot hiperbolisko siltuma vienādojumu. Tajās ņemti vērā arī siltuma zudumi no sānu virsmām. Precīzākam priekšstatam dosim matemātisko formulējumu trīs dimensiju hiperboliskā siltuma vadīšanas problēmai:

$$\tau_r \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right), x \in (0, l), y \in (0, b), z \in (0, w), t \in (0, T].$$

Pamatvienādojumam paraleloskaldnim pievienoti robežas (simetrijas) nosacījumi:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

Uz pārējām virsmām doti siltuma apmaiņas nosacījumi ar speciālu ūdeni, nevis eļļu, kā tas tiek darīts parasti (šeit h ir siltuma apmaiņas koeficients):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \beta V \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad \beta = \frac{h}{k}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \beta V \right) \Big|_{y=b} = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \beta V \right) \Big|_{z=w} = 0.$$

Sākuma nosacījumi doti formā:

$$V \Big|_{t=0} = V_0(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=0} = W_0(x, y, z).$$

Kā jau tika atzīmēts, nosacījums eksperimentāli ir nereāls. Tātad sākuma siltuma plūsmas ātrums ir jāatrod matemātiski. Šim nolūkam uzdodam fizikāli korektus sākuma nosacījumus beigu momentā:

$$V \Big|_{t=T} = V_T(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=T} = W_T(x, y, z).$$

Substitūcija, kura ļauj vienādojumu pārveidot par Gordona – Kleina vienādojumu:

$$V(x, y, z, t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau_r}\right) U(x, y, z, t).$$

Vienādojums iegūst formu:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{a^2}{\tau_r} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{4\tau_r^2} U, \quad x \in (0, l), y \in (0, b), z \in (0, w), t \in (0, T].$$

Jā pieņem, ka ir plāns y, z – virzienos tērauds ($w \ll l, b \ll l$), iegūstam 1-D problēmu

$$\text{attiecībā pret funkciju } u(x, t): \quad u(x, t) = (bw)^{-1} \int_0^b dy \int_0^w dz U(x, y, z, t).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_\tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - cu, \quad x \in (0, l), t \in (0, T], c = \left[\beta \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{w} \right) - \frac{1}{4\tau_r^2} \right].$$

Mainās arī sākuma nosacījumi, kurus viegli atrast pēc formulām. Tās atrisinājums viegli uzrakstāms ar Grīna funkcijas palīdzību:

$$u(x, t) = \int_0^l u_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^l v_0(\xi) G(x, \xi, t) d\xi.$$

Grīna funkcijas izskats:

$$G(x, \xi, t) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi) \sinh\left(t\sqrt{a_\tau^2 \lambda_i^2 + c}\right)}{\|\varphi_i\|^2 \sqrt{a_\tau^2 \lambda_i^2 + c}} + \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi) \sin\left(t\sqrt{a_\tau^2 \lambda_i^2 + c}\right)}{\|\varphi_i\|^2 \sqrt{a_\tau^2 \lambda_i^2 + c}},$$

$$\varphi_i(x) = \cos(\lambda_i x), \quad \|\varphi_i\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{\beta}{2(\lambda_i^2 + \beta^2)}.$$

Naturālais skaitlis m ir dots šādi:

$$a_\tau^2 \lambda_i^2 + \left[\beta \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{w} \right) - \frac{1}{4\tau_r^2} \right] < 0, \quad i = \overline{1, m-1},$$

$$a_\tau^2 \lambda_i^2 + \left[\beta \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{w} \right) - \frac{1}{4\tau_r^2} \right] > 0, \quad i = \overline{m, \infty}.$$

Īpašvērtības λ_l ir transcendentā vienādojuma saknes: $\lambda \tan(\lambda l) = \beta$.

Inversā problēma ar eksperimentāli nereālo sākuma nosacījumu (9) tiek risināta šādi.

Atrisinājums (15) beigu momentā $t = T$ dod:

$$u_T(x) = \int_0^l u_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) \Big|_{t=T} d\xi + \int_0^l v_0(\xi) G(x, \xi, T) d\xi$$

$$\text{vai: } \int_0^l K(x, \xi) v_0(\xi) d\xi = f_0(x).$$

Tādejādi iegūstam pirmā veida Fredholma integrālvienādojumu, t.i. nekorektu problēmu. Līdzīgi ir, ja izmantojam otro nosacījumu beigu momentā. Iegūstam līdzīgu nekorektu problēmu

$$\int_0^l \tilde{K}(x, \xi) v_0(\xi) d\xi = g_0(x), \quad \tilde{K}(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) \Big|_{t=T},$$

$$g_0(x) = v_T(x) - \int_0^l u_0(\xi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(x, \xi, t) \Big|_{t=T} d\xi.$$

Taču, ja doti abi nosacījumi beigu momentā, var rīkoties citādi, transformējot laiku:

$$\tilde{t} = T - t.$$

Pamata diferenciālvienādojums nemaina formu. Abi papildus nosacījumi kļūst par sākuma nosacījumiem un iegūstam korektas problēmas atrisinājumu:

$$u(x, \tilde{t}) = \int_0^l u_T(\xi) \frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, \tilde{t}) d\xi - \int_0^l v_T(\xi) G(x, \xi, \tilde{t}) d\xi.$$

Tātad plūsma sākuma momentā izskatās šādi:

$$v_0(x) = \int_0^l u_T(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} G(x, \xi, \tilde{t}) \Big|_{\tilde{t}=T} d\xi - \int_0^l v_T(\xi) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} G(x, \xi, \tilde{t}) \Big|_{\tilde{t}=T} d\xi.$$

Šeit sīkāk tika analizēts uzdevums stienītīm, ko kopā veica A. Buiķis ar M. Buiķi. Tas ir svarīgi, jo šie atrisinājumi ir nozīmīgi citām projektā iesaistītajām personām. Vienas dimensijas stienīša uzdevums tika risināts kopā ar profesoru H. Kali, izmantojot speciālu galīgo diferenču shēmu ar precīzās diferenciālās problēmas īpašvērtībām un īpašfunkcijām. Ideja: izmantojot taišņu metodi, vienas dimensijas problēmu reducē uz otrās kārtas parasto diferenciālvienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} \tau \ddot{U}(t) + \dot{U}(t) = \bar{k} A U(t), \\ U(0) = U_0, \dot{U}(0) = V_0. \end{cases}$$

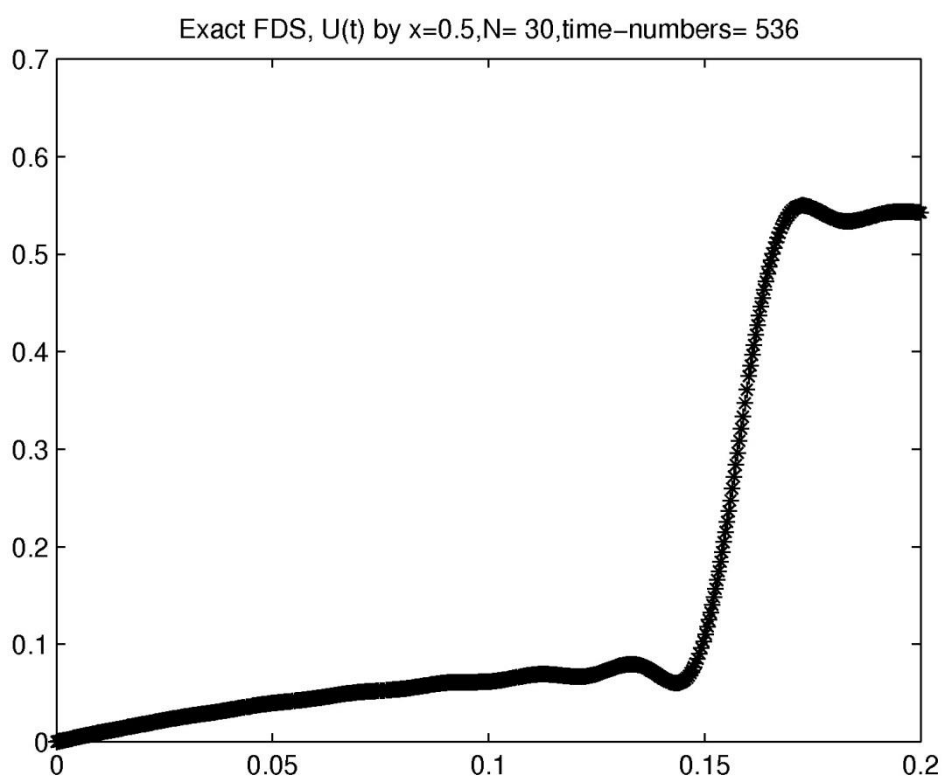
Šeit A ir standarta 3-diagonāl matrica ar $N - 1$ kārtu formā $\frac{4}{h^2}\{1;-2;1\}$. Kolonas vektori

$$U(t), \dot{U}(t), \ddot{U}(t), U_0, V_0 \text{ ar elementiem } u_k(t) \approx V(x_k, t), \quad \dot{u}_k(t) \approx \frac{\partial V(x_k, t)}{\partial t},$$

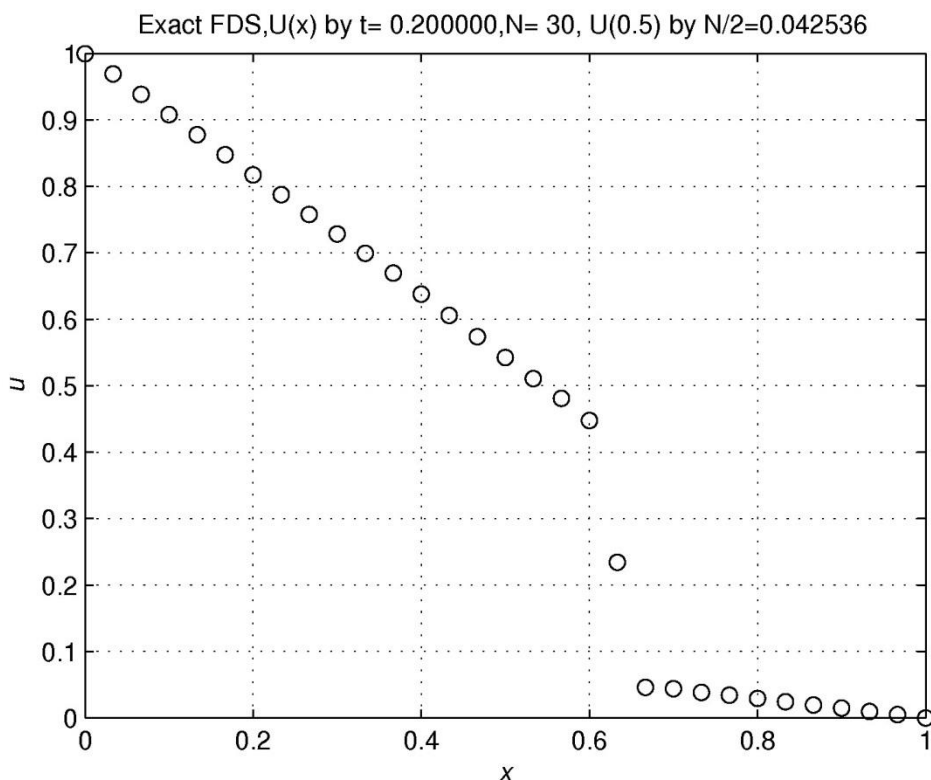
$$\ddot{u}_k(t) \approx \frac{\partial^2 V(x_k, t)}{\partial t^2}, u_k(0) = v_0(x_k), v_k(0) = V_0(x_k), k = \overline{1, N-1}.$$

$\dot{u} = Bu$, $u(0) = u_0$. Šeit u, \dot{u}, u_0 kolonas vektori $2N - 2$ kārtas formā $(U; \dot{U})^T (U; \ddot{U})^T$,

$$(U_0; V_0)^T \cdot B \text{ ir } 2N - 2 \text{ matrica formā: } B = \begin{pmatrix} 0 & E \\ \tau^{-1}kA - \tau^{-1}E \end{pmatrix}.$$

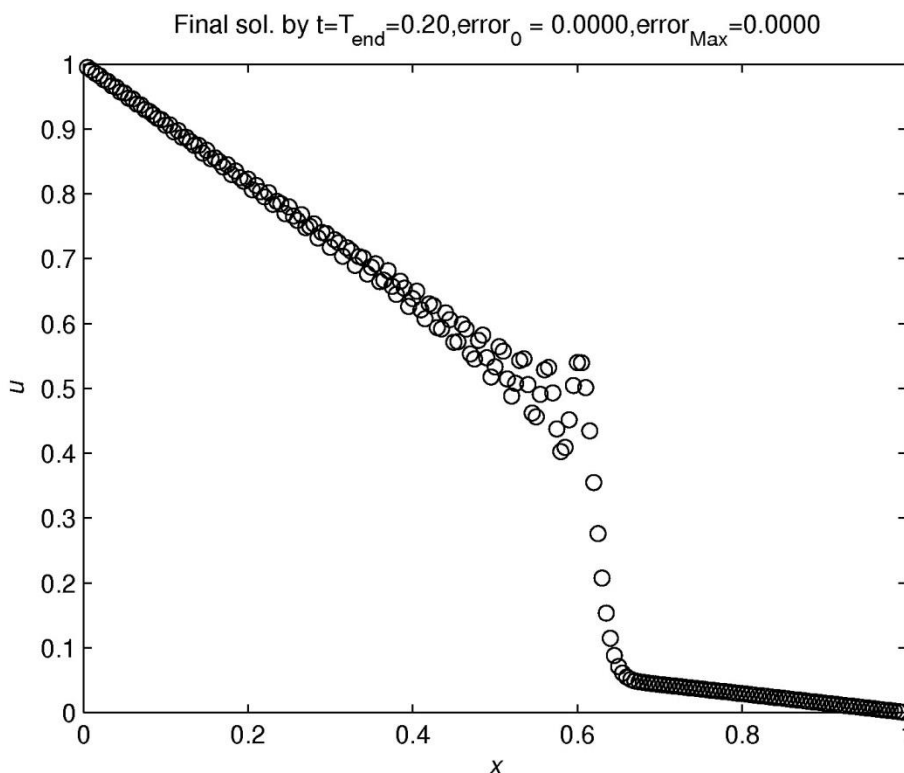


Atrisinājums laikā t punktā $x = 0.5$.



Atrisinājuma atkarība no x pie $t = 0.2$.

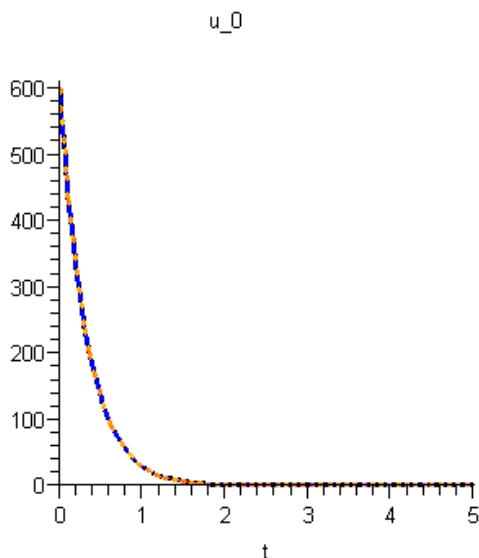
Nākamajā grafikā redzams, ka dažādas zināmas shēmas aprēķina lēciena izturēšanos. Redzams, ka tās veido mākslīgus iekšējos maksimumus. Eksaktā spektra diferencu shēma (ESDS) lēcienam apraksta pilnīgi precīzi.



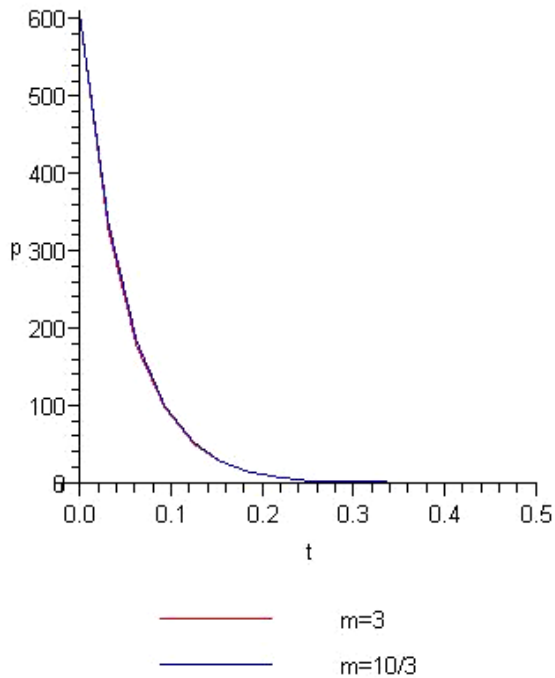
Dažādu diferencu shēmu izturēšanās telpas koordinātes virzienā. $N = 200, t = 0.2$.

Tērauda rūdīšanai tika izmantota arī konservatīvās viduvēšanas metode, to kopā ar A. Buiķi veica S. Blomkalna. Papildus S. Blomkalna veica arī divu vienu otrā iekļautu ložu matemātisko modeli.

Vispirms sfēriskā koordinātu sistēmas viena argumenta problēma tika pārvērsta par problēmu stienītīm, tad konservatīvā viduvēšana ļauj to reducēt uz robežproblēmu parastajam diferenciālvienādojumam. Jau viduvēšana ar konstanti ļauj iegūt labu rezultātu. Iespējama arī nelineāro robežnosacījumu izpēte (skat. 6. grafiku).

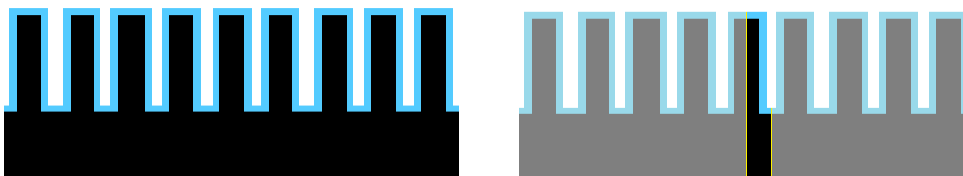


Zilais: aproksimācija ar konstanti; oranžais – ar 2. pakāpes polinomu. Sākuma plūsmām sakrīt 7 zīmīgie cipari.

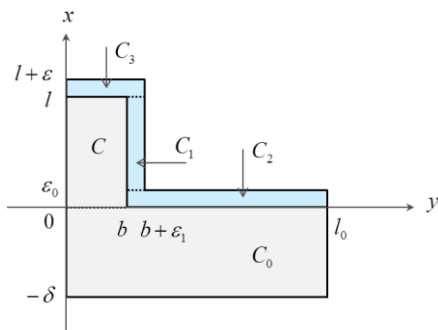


Nelineāro robežnosacījumu ietekme (filmas tipa vārīšanās uz virsmas).

V. Jāatzīmē, ka te nav attēloti pilnīgi visi rezultāti, kuri tika veikti projekta ietvaros. Piemēram, pēc profesora H. Cho slaidiem tika modelēti siltuma procesi nano struktūrās. Tos apraksta divu slāņu sienīņu ar divu slāņu ribi (otrajā grafikā parādīts elements, kuru apraksta matemātiskajā modelī):



Attēloti modeļa apakšpagabali;



Apzīmēsim stacionāro temperatūru apgabalā C_i ar $V_i(x, y)$ ar siltuma vadīšanas koeficientu k_i , un h_i siltuma apmaiņas koeficients. Pieņemam, ka $k = k_0$ un $k_2 = k_3 = k_1$. Temperatūru lauku apzīmējam kā

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in C_i.$$

Siltuma plūsmu no apakšas apzīmējam šādi:

$$\left. \frac{\partial V_0}{\partial x} \right|_{x=-\delta} = -Q_0(y).$$

Uz līnijām $y = 0$ un $y = l_0$ ir simetrijas nosacījumi:

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = 0,$$

šeit n apzīmē ārējo normāli C_i . Citur ir siltuma plūsmas nosacījumi:

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} + \beta_1^1 V_i = 0,$$

kur $\beta_1^1 = \frac{h_1}{k_1}$. Dabiski, izpildās saistības nosacījumi:

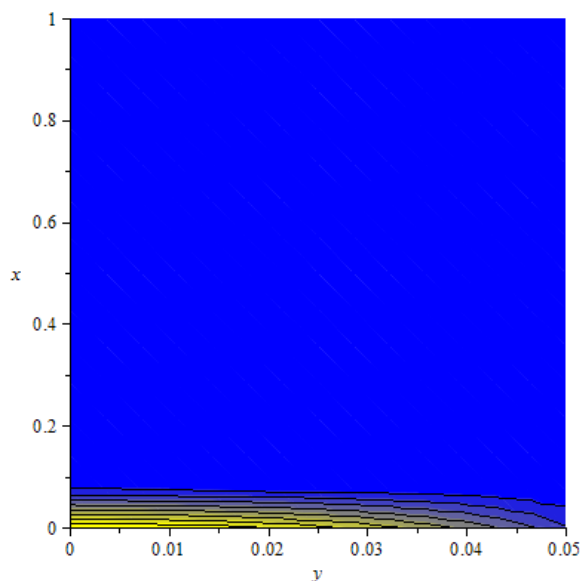
$$V_i \Big|_{x=\dots} = V_j \Big|_{x=\dots}, \quad \left. \frac{\partial V_i}{\partial x} \right|_{x=\dots} = \frac{k_j}{k_i} \left. \frac{\partial V_j}{\partial x} \right|_{x=\dots}, \quad V_i \Big|_{y=\dots} = V_j \Big|_{y=\dots}, \quad \left. \frac{\partial V_i}{\partial y} \right|_{y=\dots} = \frac{k_j}{k_i} \left. \frac{\partial V_j}{\partial y} \right|_{y=\dots}$$

Aprobežosimies ar šiem formulējumiem un parādīsim tikai daļu no iegūtajiem rezultātiem.
Parametri:

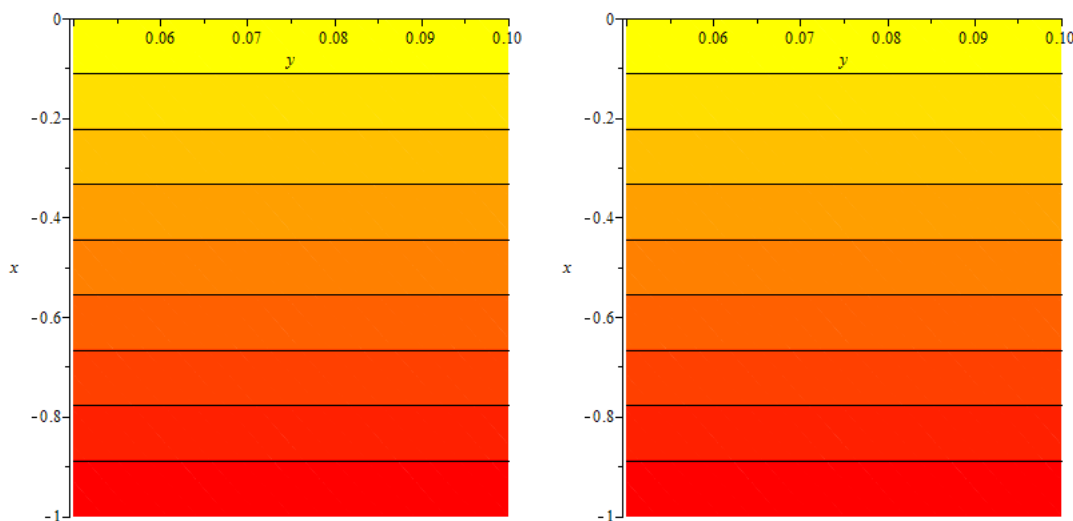
$$\delta = 500 \mu m, \quad l = 1 \mu m, \quad b = 5 \cdot 10^{-2} \mu m, \quad l_0 = 1 \cdot 10^{-1} \mu m.$$

Siltuma īpašības ir šādas:

$$h_1 = 11.085 \cdot 10^{-4} W \mu m^{-2} K^{-1}, \quad k_0 = 9 \cdot 10^{-6} W \mu m^{-1} K^{-1}, \quad Q_0 = 50 K \mu m^{-1}.$$



Temperatūras sadalījums ribā



Temperatūra sienīgas kreisajā pusē

Temperatūra sienīgas labajā pusē

Publicētas starptautisku konferenču rakstu krājumi, kuru redaktors ir A. Buiķis, ieskaitot mūsu autoru publikācijas šajos izdevumos

A.) Editors: Myriam Lazard, Andris Buiķis, e.a. *Recent Advances in Fluid Mechanics and Heat & Mass Transfer, Proceedings of the 9th IASME/WSEAS Internacional Conference on Fluid Mechanics & Aerodynamics and Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment*. Florence, Italy, August 23-25, 2011. WSEAS Press. (Editors' forward -7. lpp)

1. T. Bobinska, A. Buiķis. A mathematical model for a willow flute. *Recent Advances in Fluid Mechanics and Heat@Mass Transfer*. p. 188-192.

2. T. Bobinska, M. Buike, A. Buiķis. Comparing solutions of hyperbolic and parabolic heat conduction equations for L-shape samples. *Recent Advances in Fluid Mechanics and Heat@Mass Transfer*. p. 384-389.

3. S. Blomkalna, M. Buike, A. Buiķis. Several intensive steel quenching models for rectangular and spherical samples. *Recent Advances in Fluid Mechanics and Heat@Mass Transfer*. p. 390-395.

4. M. Lenčmane, A. Buiķis Analytical Solution of a Two-dimensional Double-fin Assembly. *Recent Advances in Fluid Mechanics and Heat@Mass Transfer*. p. 396-401.

B.) Editors: Myriam Lazard, Andris Buiķis, e.a *Recent Advances in Applied & Biomedical Informatics and Computational Engineering in System Applications*. Proceedings of the 4th WSEAS International Conference on Biomedical Electronics and Biomedical Informatics (BEBI'11). Florence, Italy, August 23-25, 2011. WSEAS Press.

1. A. Aldersons, A. Buiķis. Mathematical algorithm for heart rate variability analysis. *Recent Advances in Applied & Biomedical Informatics and Computational Engineering in System Applications*. p. 381-386.

C.) Editors: Myriam Lazard, Andris Buiķis, e.a *Recent Advances in Signal Processing, Computational Geometry and System Theory*. Proceedings of the 11th WSEAS

International Conference on Systems Theory and Scientific Computation. Florence, Italy, August 23-25, 2011. WSEAS Press.

Bibliogrāfija

1. A.Buikis, H.Kalis, A.Gedroics. "Mathematical modelling of 2D magnetohydrodynamics and temperature fields induced by alternating current feeding the bar type conductors in a cylinder", *MAGNETOHYDRODYNAMICS*, VOL.46, 2010, PP.41-57
2. S.Kostjukova, A.Buikis. "Integral rational spline with jump for discontinuous mathematical problems in layered media", *LATEST TRENDS ON THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS, FLUID MECHANICS AND HEAT & MASS TRANSFER*, 2010.
3. M.Lencmane, A.Buikis „Analytical Solution of a Two-dimensional Double-fin Assembly” *RECENT ADVANCES IN FLUID MECHANICS AND HEAT & MASS TRANSFER ISBN: 978-1-61804-026-8, P 396-401.*
4. S.Blomkalna, M.Buiķe, A.Buiķis. „Several Intensive Steel Quenching Models for Rectangular and Spherical Samples” *RECENT ADVANCES IN FLUID MECHANICS AND HEAT & MASS TRANSFER ISBN: 978-1-61804-026-8, P 390-395.*
5. H.Kalis and A.Buikis "Method of lines and finite difference schemes with the exact spectrum for solution the hyperbolic heat conduction equation" *MATHEMATICAL MODELLING AND ANALYSIS VOL. 16, NO. 2 (2011), P 220-232.*
6. M. Lencmane, A. Buikis „ANALYTICAL TWO - DIMENSIONAL SOLUTION FOR TRANSIENT PROCESS IN THE SYSTEM WITH RECTANGULAR FINS”, Proceedings of the 6th International Scientific Colloquium, Rīga, 2010, pp 157-180.
7. A. Pilikšere, A. Buikis „ANALYTICAL SOLUTION FOR INTENSIVE QUENCHING OF CYLINDRICAL SAMPLE”, Proceedings of the 6th International Scientific Colloquium, Rīga, 2010, pp 181-188.
8. Buikis, A. Interpolation of integral mean of piecewise smooth function by means of parabolic spline. *Latvian Mathematical Yearbook*, 1985, No. 29, pp. 194-197. (In Russian)
9. Buikis, A. Calculation of coefficients of integral parabolic spline. *Latvian Mathematical Yearbook*, 1986, No. 30, pp. 228-232. (In Russian)
10. Buikis, A. Definition and calculation of a generalized integral parabolic spline. *Proceedings of the Latvian Academy of Sciences. Section B*, 1995, No. 7/8 (576/577), pp.97-100.
11. M.Buikis, A.Buikis. Analytical Approximate Method for Three-Dimensional Transport Processes in Layered Media. *Proceedings of 4th IASME/WSEAS International Conference on HEAT TRANSFER, THERMAL ENGINEERING and ENVIRONMENT*, Elounda, Crete Island, Greece, August 21-23, 2006, p. 232-237.
12. M.Buikis, A.Buikis. System of Models for Transport Processes in Layered Strata. *Proceedings of 5th WSEAS International Conference on SYSTEM SCIENCE and SIMULATION in ENGINEERING*, Tenerife, Canary Islands, Spain, December 16-18, 2006, p. 19-24.
13. M.Buikis, A.Buikis. Modelling 3-D transport processes in anisotropic layered stratum by conservative averaging method. *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer*, Issue 4, vol.1, 2006, p. 430-437.
14. Bear, J., Verruijt, A. Modeling Groundwater Flow and Pollution. D. Reidel Publishing Company, 1987.
15. Luckner, L., Schestakow, W.M. *Simulation der Geofiltration*. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie. Leipzig, 1976. (In German and Russian)
16. Buikis, A., Ulanova, N. Analytically-numerical method for temperature fields in multilayered system. *Advanced Computational Methods in Heat Transfer VI*. WIT Press, 2000, pp. 445-453.

17. A. Buikis, Conservative averaging as an approximate method for solution of some direct and inverse heat transfer problems, *Advanced Computational Methods in Heat Transfer*, IX, WIT Press, 2006, pp. 311-320.
18. Vilums R., Buikis A. "Conservative averaging method for partial differential equations with discontinuous coefficients". *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer*. Vol. 1, Issue 4, 2006, p. 383-390.
19. S. Kostjukova, M. Buike, A. Buikis, Conservative averaging method for the heat conduction and convection processes in layered media. The 6th Baltic Heat Transfer Conference (BHTC2011) , August 24-26, 2011, Tampere, Finland. 6 p. (CD-ROM formā).
20. A. Piliksere, M. Buike, A. Buikis, Steel quenching process as hyperbolic heat equation for cylinder. The 6th Baltic Heat Transfer Conference (BHTC2011) , August 24-26, 2011, Tampere, Finland. 7 p. (CD-ROM formā).
21. R. Vilums, Comparison of conservative averaging and finite volume methods in mathematical models of automotive fuses. Abstracts of 6th Baltic Heat Transfer Conference (BHTC2011), August 24-26, 2011, Tampere, Finland. 9 p. (CD-ROM formā).
22. Incropera F.p., DeWitt P.D., Bergman T.L., Lavine A.S. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 6th Ed.* John Wiley&Sons, 2006.

Starptautisku konferenču tēzes

1. T. Bobinska, M. Buike, A. Buikis. Comparing solutions of hyperbolic and parabolic heat conduction equations for L-shape samples. 15th International Conference Mathematical Modelling and Analysis, Abstracts, May 26-29, 2010, Druskininkai, Lithuania. P.8.
2. H. Kalis, A. Buikis. Method of lines and finite difference schemes of exact spectrum for solution the hyperbolic heat conduction equation. 15th International Conference Mathematical Modelling and Analysis, Abstracts, May 26-29, 2010, Druskininkai, Lithuania. P. 42.
3. M. Lencmane, A. Buikis. Analytical solution of two-dimensional double-fin assembly. 15th International Conference Mathematical Modelling and Analysis, Abstracts, May 26-29, 2010, Druskininkai, Lithuania. P. 61.
4. S. Kostjukova, M. Buike, A. Buikis. Conservative averaging method for the heat conduction and convection processes in layered media. Abstracts of 6th Baltic Heat Transfer Conference (BHTC2011), August 24-26, 2011, Tampere, Finland. P.48.-49.
5. A. Piliksere, M. Buike, A. Buikis. Steel quenching process as hyperbolic heat equation for cylinder. Abstracts of 6th Baltic Heat Transfer Conference (BHTC2011), August 24-26, 2011, Tampere, Finland. P. 88-89.
6. T. Bobinska and A. Buikis. A mathematical model for a Norwegian flute. Abstr. of 16-th intern. Conf. on "Mathematical Modelling and Analysis", MMA2011, May 25-28, 2011, Sigulda, Latvija, p. 17.
7. A. Buikis and A. Piliksere. Issues of hyperbolic heat Exchange equation in polar coordinate system. Abstr. of 16-th intern. Conf. on "Mathematical Modelling and Analysis", MMA2011, May 25-28, 2011, Sigulda, Latvija, p. 20.
8. M. Lencmane and A. Buikis. Inverse heat transfer problem for the rectangular domain. Abstr. of 16-th intern. conf. on "Mathematical Modelling and Analysis", MMA2011, May 25-28, 2011, Sigulda, Latvija, p. 80.

Pētījuma apakšaktivitāte

4.4.2. Efektīvāku skaitlisko metožu izstrāde diferenciālvienādojumu problēmām ar atšķirīgu kārtu koeficientiem pie atvasinājumiem

Aktivitātes vadītājs: profesors Harijs Kalis

Pētījumu mērķis apakšaktivitātē : speciālu skaitliskās analīzes metožu izstrāde un lietojumi sarežģītu matemātiskās fizikas problēmu risināšanā un uzlabotu, jaunu, modernizētu skaitlisko metožu izstrāde inženiertehniskās problēmās.

I .Vispārīgā daļa: pētījumu mērķa realizācija

Modelējot lietišķās matemātiskās fizikas, hidrodinamikas un magnētiskās hidrodinamikas problēmas skaitliski ir jārisina parciālie diferenciālvienādojumi un to sistēmas ar atšķirīgu kārtu koeficientiem pie atvasinājumiem. Šo parametru klātbūtne, kā arī sarežģīta risināmā apgabala ģeometrija rada universālajām labi izstrādātajām skaitliskajām metodēm un datorprogrammu paketēm papildus lietošanas grūtības un tās kļūst neefektīvas. Tāpēc jāizstrādā uzlabotas speciālas skaitliskās metodes, kuras ir ar labām precizitātes īpašībām un viegli realizējamas, risinot problēmas ar parametriem plašā to izmaiņu diapazonā.

Projektā iesākti un tika turpināti pētījumi jaunu speciālu diferenču shēmu izstrādei parasto un parciālo diferenciālvienādojumu problēmu skaitliskai modelēšanai, kuras balstās uz precīzā (diferenciālā) spektra (īpašvērtību un īpašfunkciju) izmantošanu telpiskā 2. kārtas atvasinājuma aizstāšanai ar galīgām diferencēm, veidojot precīzā spektra diferenču shēmas (PSDS). Attiecīgā galīgo diferenču matrica tiek reducēta kanoniskā veidā, lietojot galīgo diferenču spektru. Kanoniskās formas M-ās kārtas diagonālmaticā diskrētās īpašvērtības aizstāj ar diferenciāloperatora galīgā skaitā pirmajām M īpašvērtībām, veidojot PSDS matricu. Tika veidoti dažādām 2D matemātiskās fizikas problēmām (lineārām un nelineārām) taišņu metodes risināšanas algoritmi, atstājot citu virzienu atvasinājumus nepārtrauktus. Tiek pētītas parciālo diferenciālvienādojumu problēmas ar dažāda veida robežnosacījumiem. Izstrādātie algoritmi tiek realizēti ar datorprogrammas MATLAB palīdzību, risinot lineāras un nelineāras problēmas diferenciālvienādojumiem. Atsevišķi tika izdalītas matemātiskās fizikas problēmas ar periodiskajiem robežnosacījumiem. Tad var veidot algoritmus ar cikliskajām matricām, kas atļauj vienkāršot aprēķinus. PSDS ir sevišķi efektīvas 1.veida un periodisko robežnosacījumu gadījumos, jo tad M diskrētie īpašvektori sakrīt ar diferenciālās problēmas pirmajām M īpašfunkciju vērtībām režģī.

PSDS ideja ir literatūrā minēta pirmo reizi 1975.g. ukraiņu zinātnieku V.Makarova un I. Gavriļuka darbā „ On constructing the difference net circuits with the exact spectrum „ , Dopov. Akad. Nauk Ukr. RSR, Ser. A, pp. 1077–1080, 1975, (ukraiņu valodā), apskatot lineāras siltuma vadīšanas problēmas ar homogēniem 1. veida robežnosacījumiem. Šo metodi izdevās pārnest uz dažādām matemātiskās fizikas problēmām ar dažādiem robežnosacījumiem (1.veida, 3. veida un periodiskajiem) [1,4,5,6,7,8,23,25,28,31,33].

Metodes efektivitāte tika salīdzināta ar standarta 2. kārtas aproksimācijas diferenču shēmām (DS-2) un augstākas p- kārtas aproksimācijas diferenču shēmām (DS-p, p=4;6;8) periodisko nosacījumu gadījumā.

Sevišķi efektīva PSDS izrādījās problēmām ar periodiskajiem robežnosacījumiem. Šajos pētījumos projekta laikā tika izstrādāta LU doktoranta Aigara Gedroica disertācija „Matemātiskās fizikas problēmu ar periodiskajiem robežnosacījumiem skaitliskā modelēšana” , kura tiks aizstāvēta 2013.g. Viņa pētījumu rezultāti kopā ar līdzautoriem ir publicēti 5 darbos

[2,3,7,16,30] (raksts [33] pieņemti publicēšanai) un 10 referātu tēzēs [1,6,13,14,24,23,25,27,28]. Dažādas parasto un daļēji diferencējamību problēmas ar 1. veida robežnosacījumiem, lietojot PSDS, ir apskatījis LU Fizikas un Matemātikas fakultātes maģistrs Sergejs Rogovs, kā rezultātā ir iznākusi kopīga publikācija [15] (raksts [33] pieņemts publicēšanai) un 3 referātu tēzes [23,25,28]. Otrs maģistrs Maksims Marinaki, risinot problēmu par periodiski novietotu cilindru aptecēšanu magnētiskā laukā ir līdzautors rakstam [30] un iesniegtajam publicēšanā rakstam [32], kā arī referāta tēzei [27].

PSDS idejas un lietojumu piemēri tiks atspoguļotas LU fizikas un fakultātes maģistriem paredzētajā mācību līdzeklī [34]

Otrs pētījumu virziens ir saistīts ar skaitlisko metožu izstrādi inženieru tipa aprēķiniem, reducējot sarežģītus matemātiskus modeļus uz vienkāršākiem. Šo algoritmu izstrāde balstās uz dažādu matemātisku metožu lietošanu un pamatošanu. Izstrādātās skaitliskās metodes pielietotas **apakšaktivitātes Nr. 4.4.1. „Klasisku matemātiskās fizikas metožu netradicionāla izmantošana matemātiskajā modelēšanā”** dažādu inženiertehnisko problēmu risināšanā. Projektā tika apskatītas un modelētas šodienas tehnoloģijām raksturīgi procesi. No prakses nākošajos modeļos visai bieži parādās lieli un mazi geometriski vai fizikāli parametri, diferencējamību koeficientu lēcieni u.tml. Tiešās un inversās matemātiskās fizikas problēmas mūsdienās praktiski un teorētiski jāanalizē, ņemot vērā to specifiku. Nākas izstrādāt konkrētai problēmu klasei piemērotas speciālas metodes un pieejas, jo šādos gadījumos vispārīgās analītiskās un skaitliskās metodes ne vienmēr ir pietiekami efektīvas un precīzas. Formulējumu analīzei un to modifikācijai un matemātiskās fizikas problēmu precīzo un tuvināto atrisinājumu konstruēšanai tika izmantotas precīzas un tuvinātās (tai skaitā galīgās diferences), analītiskās un skaitliskās metodes. Tas ietver praksei svarīgu lietišķo problēmu matemātisko modelēšanu: intensīvās tērauda rūdīšanas tehnoloģijas teorētisko modeļu konstrukciju, to analīzi un precīzo un tuvināto atrisinājumu konstruēšanu [5,8,17]; uz virpuļu ietekmes principiem balstītu jauna tipa enerģētisko iekārtu matemātisko modelēšanu [2]; metāla daļiņu kūdras slāņos matemātisko modelēšanu [14,16,24]; magnētizēta izstiepta piliena un diega kustības modelēšanu rotējošā magnētiskajā laukā [9,10,11,18,19,26,29]; nelineāras siltuma plūsmas modelēšana [7]; MHD šķidrums plūsmu modeļu izveidi, analīzi, aprēķinus [3,22,27,30,32]; elektronu plūsmas modeļa žiratronā izveidi, analīzi un skaitlisko modelēšanu [12,20,21].

Inženieru tipa aprēķinos kopā ar speciālajām diferencu shēmām tiek lietota arī prof. Andra Buiķa izstrādātā konservatīvā viduvēšanas metode ar kuras palīdzību var samazināt sākotnējās problēmas dimensiju [14,16,24,33].

Pētījumu rezultāti ir atspoguļotas 13 publikācijās [2,3,7,8,9,15,16,17,18,19, 20,21,30], 1 raksts ir pieņemts publicēšanai [33], 3 ir iesniegti publicēšanai [29,31,32]. Pavisam nolasīti 16 referāti: 9 referāti starptautiskajās MMA (matemātiskā modelēšana un analīze) konferencēs - Druskinikai (Lietuva) 2010.g. no 26.-29. maijā [5], Siguldā (Latvija) 2011.g. no 25-28. maijā [10,11,12,13,14], Tallinā (Igaunija) 2012.g. no 6.-9. jūnijā [25,26,27]; 1 referāts 6. starptautiskajā NAA'12 (skaitliskā analīze un lietojumi) konferencē Lozenetz (Bulgārija) 2012.g. no 15-20. jūnijā [28]; 1 referāts 16. starptautiskajā ICDA2010 (diferencu vienādojumi un to lietojumi) konference Rīgā 2010.g. no 19.-23. jūnijā [6]; 2 referāti 8-tā Latvijas matemātikas konferencē Valmierā 2010.g. 9.-10. aprīlī [1,4]; 3 referāti 9-tā Latvijas matemātikas konferencē Jelgavā 2012.g. 30.-31. martā [22,23,24]; (skat. referātu tēzes).

Veidojot jauna tipa algoritmus problēmām ar dažādiem koeficientiem pie atvasinājumiem H.Kalis bija sagatavojis referāta tēzes „The finite difference schemes with exact spectrum for solution some heat transfer problems” 5. starp. NAA'10 konf. „Finite-difference methods: theory and applications”, Lozenetz (Bulgārija) 2010.g. 28. jūn. -2.jūl. Autors tomēr konferencē nepiedalījās, jo tēzes nerasniedza adresātu.

II. Detalizēts pētījumu izklāsts

Tālāk vadoties no publicētiem darbiem un referātu tēzēm tiks aprakstīti un analizēti pētījumu rezultāti jauno un uzlaboto algoritmu veidošanā un konkrēto lietišķo problēmu matemātiskajā modelēšanā.

1. Precīzā spektra diferencu shēmas (PSDS) izstrāde

[1,4,6,13,15,23,25,28,31,33].

Izstrādājot PSDS kā efektīvu metodi risinot parasto un daļējo diferenciālvienādojumu problēmas apskatīsim 3 veida robežnosacījumus: periodiskos ,

1. veida un 3.veida homogēnos robežnosacījumus.

1. 1. Problēmas ar periodiskajiem robežnosacījumiem[13,33].

Veidojot PSDS ar periodiskajiem robežnosacījumiem svarīgi ir izmantot priekšrocības, kas rodas lietojot cikliskās matricas.

Ērti ir veidot MATLAB algoritmus darbībām ar cikliskajām matricām – matricas inversās matricas iegūšanu, matricu reizināšanu, matricas reizināšana ar vektoru.

Cikliska matrica ar dimensijām $N \times N$ ir matrica formā

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_n & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

To var apzīmēt ar tās pirmo rindu:

$$A = [a_1; a_2; a_3; \dots; a_{n-1}; a_n].$$

Šīm matricām ir iespējami vienkāršoti algoritmi matricu darbībām, kuri var tikt veikti salīdzinoši mazā datorlaikā – saskaitīšanai, reizināšanai, inversās matricas atrašanai.

Vienkāršota ir arī šo matricu īpašvērtību un īpašvektoru atrašana.

Šādu matricu summa un reizinājums ir cikliskas matricas. Arī gadījumā, kad cikliskai matricai eksistē inversā matrica, tā arī ir cikliska.

MATLAB ciklisko matricu klases definīciju ar saskaitīšanas, reizināšanas un inversās matricas atrašanas operācijām ir izveidojis LU doktorants Aigars Gedroics.

Matricas A īpašvērtības var izteikt formā $f(\omega^k)$, $k = \overline{0, n-1}$, kur ω ir primitīvā n -tās pakāpes sakne no 1 jeb vienādojuma $x^n - 1 = 0$ sakne $e^{2\pi i/n}$,

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda^{i-1}.$$

Cikliskās matricas īpašvektori ir formā $(1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k})^T$, $k = \overline{0, n-1}$.

Cikliskajām matricām arī piemīt īpašība

$$A = WDW^* = W^*DW,$$

kur W ir matrica, kas sastāv no matricas A īpašvektoriem matricas kolonnās, matrica D – diagonālmatrix ar īpašvērtībām uz diagonāles. Matrica W^* ir matricas W kompleksi saistītā matrica.

Kā piemēru apskatīsim Puasona 1D vienādojuma problēmu ar cikliskajiem robežnosacījumiem:

$$-u''(x) = f(x), u(0) = u(L), u'(0) = u'(L).$$

Šai problēmai pēc Rīmaņa integrējamās $f(x)$ funkcijas vienmēr ir unikāls atrisinājums, gadījumā, ja izpildās nosacījums

$$\int_0^L f(x) dx = 0$$

un tiek fiksēts nezināmās funkcijas $u(x)$ vērtība punktā

$$u(x_0) = u_0, x_0 \in [0, L].$$

Šai problēmai ir iespējams izteikt atrisinājumu analītiski.

Iesākumā var atrast atrisinājumu problēmai, kurai $x_0 = 0$ un $u_0 = 0$. Tas ir formā

$$\bar{u}(x) = \int_0^x (t-x)f(t) dt - \frac{x}{L} \int_0^L t f(t) dt$$

Vienkāršas transformācijas rezultātā var atrast arī atrisinājumu vispārīgajai problēmai

$$u(x) = \bar{u}(x) - \bar{u}(x_0) + u_0$$

Problēmas diskretizācijai izmantosim 3 punktu šablonu, aproksimējot 2. kārtas atvasinājumu ar centrālo diferenci:

$$-u''(x_j) \approx \frac{-u(x_{j-1}) + 2u(x_j) - u(x_{j+1}))}{h^2}$$

Sākotnējo problēmu ar N algebriskiem vienādojumiem (DS-2), var pārrakstīt formā

$$Ay = f,$$

kur $N \times N$ dimensiju matrica A ir formā

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

kur y, f ir N –tās kārtas vektori-kolonas ar elementiem $y_j \approx u(x_j)$ $f_j = f(x_j)$.

Matrica A ir cikliska, t.i. to var definēt ar tās pirmo rindu un pārējās tās rindas ir pirmās rindas kopijas ar nobīdi par vienu elementu. Tādēļ var apzīmēt jauniegūto matricu A šādi:

$$A = \frac{1}{h^2} [2; -1; 0; \dots; 0; 0; -1]$$

No spektrālās problēmas matricai A seko, ka īpašvērtības ir

$$\mu_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi}{N}$$

un w^k var izteikt formā

$$w^k_j = \sqrt{\frac{1}{N}} \exp\left(\frac{2\pi i k j}{N}\right).$$

Vektora w^k un kompleksi saistītā vektora w^{*k} skalārais reizinājums ir vienāds ar Kronekera simbolu $\delta_{k,m}$.

Pēc ciklisko matricu īpašības, matricu A var izteikt formā $A = WDW^*$.

Izmantojot šo izteiksmi, problēmu $Ay = f$ transformējam formā $Dv = W^*f$, kur $y = Wv$. Indeksam $j = \overline{1, N-1}$ var atrisināt jauniegūtās problēmas nezināmā argumenta v attiecīgos vērtības:

$$v_j = \frac{1}{\mu_j} (W^*f)_j$$

Priekš $j = N$ tiek iegūta sakarība, kas ir konsistenta ar problēmas atrisinājuma eksistences nosacījumu $\int_0^L f(x) dx = 0$. Tādēļ varam izvēlēties $v_N = 0$.

Nepārtrauktajai spektrālajai problēmai ir īpašvērtības

$$\lambda_k = \left(\frac{2\pi k}{L}\right)^2$$

un ortonormētas īpašfunkcijas

$$w^k = \sqrt{\frac{1}{L}} \exp\left(\frac{2\pi i k x}{L}\right)$$

Izsakot funkciju f formā $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k w^k(x)$, $b_k = (w^k, f)$,

var izteikt precīzo atrisinājumu kompleksas rindas formā

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k w^k(x), a_k = \frac{b_k}{\lambda_k}$$

kur $a_0 = b_0 = 0$.

Veidojot DSPS matricā $A = WDW^*$ diagonālmaticā D elementus $d_k = \mu_k$ aizvieto ar nepārtrauktās problēmas īpašvērtībām λ_k šādā veidā

1) $d_k = \lambda_k$, ja $k = 1, 2, \dots, N/2$,

2) $d_k = \lambda_{N-k}$, ja $k = N/2 + 1, \dots, N-1$, $d_N = 0$.

Periodiskai funkcijai $f(x)$ ir spēkā kompleks izvirzījums, kuru var pārveidot reālā formā

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w^k(x) + a_{-k} w^{-k}(x) + a_0 \frac{1}{\sqrt{L}} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \frac{2\pi kx}{L} + c_k \sin \frac{2\pi kx}{L} + \frac{b_0}{2}$$

kur $b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{2\pi kt}{L} dt$, $c_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{2\pi kt}{L} dt$. Periodiskai funkcijai $b_0 = 0$.

Tātad izvirzot atrisinājumu $u(x)$ reālā Furjē rindā iegūstam

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^1_k \cos \frac{2\pi kx}{L} + a^2_k \sin \frac{2\pi kx}{L} + \frac{a^0}{2}, \text{ kur } a^1_k = b_k / \lambda_k, a^2_k = c_k / \lambda_k.$$

Tādā veidā var iegūt reālu izvirzījumu. Tas ir spēkā arī diskrētā gadījumā, jo N kārtas vektoram f ar komponentēm f_j iegūstam

$$f_j = \sum_{k=1}^N a_k w^k_j = \sum_{k=1}^{N/2} b_k \cos \frac{2\pi kj}{N} + c_k \sin \frac{2\pi kj}{N} + \frac{b_0}{2},$$

kur $b_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f_j \cos \frac{2\pi kj}{N}$, $c_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f_j \sin \frac{2\pi kj}{N}$. Periodiskam vektoram $b_0 = 0$.

Līdz ar algebriskās sistēmas vai DS-2 atrisinājumu (vektoru) y var izvirzīt diskrētās Furjē rindā

$$y = \sum_{k=1}^{N/2} a^1_k \cos \frac{2\pi kj}{N} + a^2_k \sin \frac{2\pi kj}{N} + \frac{b_0}{2}, \text{ kur } a^1_k = b_k / \mu_k, a^2_k = c_k / \mu_k.$$

Aizvietojot diskrētās īpašvērtības μ_k ar skaitā $N/2$ nepārtrauktām īpašvērtībām λ_k iegūstam Furjē rindas nogriezni ar $N/2$ locekļiem (saskaitāmiem), kas sakrīt ar PSDS algoritmu.

Šos izvirzījumus ērti lietot analītiskos pārveidojumos, risinot robežproblēmas ar periodiskajiem robežnosacījumiem. Jaukta veida problēmas parciālajiem diferenciālvienādojumiem, lietojot taisņu metodi, tika reducētas uz parasto diferenciālvienādojumu sistēmām, kuras risinot analītiski ar iepriekš aprakstīto spektrālo metodi un PSDS.

Veidojot augstākas kārtas DS-p ar periodiskajiem nosacījumiem, apskatam aproksimācijas atvasinājumam $u''(x_j)$, lietojot vienmērīgu režģi $x_j = jh$ ar $p+1$ punktu šablonu $(x_{j-p/2}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+p/2})$. Lietojot nenoteikto koeficientu metodi ar nezināmiem koeficientiem C_k, E_p apskatam aproksimāciju ar kārtu $O(h^p)$ formā:

$$u''(x_j) = 1/h^2 \sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k u(x_{j-k}) + E_p h^p u^{(p+2)}(\psi_j)/(p+2)!, \quad x_{j-p/2} < \psi_j < x_{j+p/2}.$$

Iegūstam šādus koeficientus:

- 1) $p=2$: $C_1=1, C_0=-2, E_2=-2,$
- 2) $p=4$: $C_1=4/3, C_2=-1/12, C_0=-5/2, E_4=8,$
- 3) $p=6$: $C_1=3/2, C_2=-3/20, C_3=1/90, C_0=-49/18, E_6=-72,$ u. t.t.

Matrica A ir cikliska formā

$$A = 1/h^2 [C_0, C_1, \dots, C_{p/2}, 0, \dots, 0, C_{p/2}, C_{p/2-1}, \dots, C_2, C_1]$$

ar īpašvērtībām

- 1) $p=2$: $\mu_k = 4/h^2 \sin^2(\pi k/N),$
- 2) $p=4$: $\mu_k = 4/h^2 (\sin^2(\pi k/N) + 1/3 \sin^4(\pi k/N)),$
- 3) $p=6$: $\mu_k = 4/h^2 (\sin^2(\pi k/N) + 1/3 \sin^4(\pi k/N) + 8/45 \sin^6(\pi k/N)),$ u.t.t.

Vispārīgas formulas DS-p aproksimācijai ar kārtu $O(h^p)$ ir dotas darbos [1,13,33].

Matricu A var uzrakstīt formā $A = WDW^*$, kur īpašvektori saglabājās (matrica W), bet diagonālmatrix satur atbilstošās aproksimācijas kārtas īpašvērtības. Tādējādi var iegūt augstākas aproksimācijas kārtas DS-p, $p=2,4,\dots$ algoritmus, kurus var salīdzināt ar DSPS.

Analogi tiek veidoti DS-2 un PSDS algoritmi 2D Puasona „siltuma pārnese un viļņu vienādojumu modelēšanai, kad rezultātā, lietojot taisņu metodi, iegūstam Koši problēmu parasto diferenciālvienādojumu sistēmai. Lineārā gadījumā var iegūt atrisinājumu analītiskas izteiksmes, bet nelineārās problēmas ērti ir skaitliski risināt ar MATLAB.

1. 2. Problēmas ar 1. veida robežnosacījumiem [15].

Daudzas matemātiskās fizikas problēmas jārisina ar 1. veida robežnosacījumiem, kurus var viegli pārveidot par homogēniem. Veidojot PSDS apskatīsim iepriekšējo piemēru: Puasona 1D vienādojumu ar 1. veida homogēniem robežnosacījumiem:

$$-u''(x) = f(x), \quad u(0) = u(L) = 0.$$

Šīs problēmas atrisinājumu

$$u(x) = \int_0^x (t-x) f(t) dt - \frac{x}{L} \int_0^L (t-L) f(t) dt$$

var atrast arī ar spektrālo metodi.

Nepārtrauktajai spektrālajai problēmai ir īpašvērtības

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2$$

un ortonormētas īpašfunkcijas $w^k(x) = \sqrt{2/L} \sin \frac{\pi k x}{L}$.

Izsakot funkciju $f(x)$ formā $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k(x)$,

kur $b_k = (f, w^k) = \int_0^L w^k(t) f(t) dt$,

varam izteikt precīzo atrisinājumu Furē rindas formā

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w^k(x), \quad a_k = \frac{b_k}{\lambda_k}.$$

Diskrēto problēmu DS-2 ar $N-1$ algebriskiem vienādojumiem, var pārrakstīt formā

$$Ay = f,$$

kur matrica A ir standarta 3-diagonālmatrix ar elementiem $1/h^2 \{-1, 2, -1\}$, y, f ir $N-1$ -ās kārtas vektori-kolonas. No diskrētās spektrālās problēmas matricai A seko, ka īpašvērtības ir

$$\mu_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2N},$$

un īpašvektoru w^k komponentes var izteikt formā

$$w_j^k = \sqrt{2/N} \sin \frac{\pi k j}{N}.$$

Ortogonalos vektorus w^k un \mathbf{w}^m skalārais reizinājums ir vienāds ar Kronekera simbolu $\delta_{k,m}$. Novietojot šos vektorus $N-1$ kārtas matricā W iegūstam $WW = W^2 = E$ – vienības matricu. Pēc matricu īpašības, matricu A var izteikt formā $A = WDW^*$, kur $W^* = W$.

Izmantojot šo izteiksmi DS-2 vai problēmu $Ay = f$ transformējam formā $Dv = W^*f$, kur $y = Wv$. Visiem $j = \overline{1, N-1}$ var atrast vektora v koordinātes:

$$v_j = \frac{1}{\mu_j} (W^*f)_j$$

Veidojot PSDS no DS-2 matricā $A = WDW$ diagonālmatrixas D elementus $d_k = \mu_k$ aizvieto ar nepārtrauktās problēmas pirmajām skaitā $N-1$ īpašvērtībām λ_k .

Ja funkcijai $f(x)$ ir spēkā Furjē rindas izvirszījums

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{\pi k x}{L}, \text{ tad } c_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{\pi k t}{L} dt.$$

Tātad izvirszot atrisinājumu $u(x)$ Furjē rindā iegūstam

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k x}{L}, \text{ kur } a_k = c_k / \lambda_k.$$

Tas ir spēkā arī diskrētā gadījumā, jo $N-1$ kārtas vektoram f ar komponentēm f_j iegūstam

$$f_j = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \sin \frac{\pi k j}{N}, \text{ kur } c_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f_j \sin \frac{\pi k j}{N}.$$

Līdz ar to atrisinājuma vektora y (DS-2) komponentes y_j var izvirszīt diskrētā Furjē rindā

$$y_j = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sin \frac{\pi k j}{N}, \text{ kur } a_k = c_k / \mu_k.$$

Aizvietojojot diskrētās īpašvērtības μ_k ar skaitā $N-1$ nepārtrauktām īpašvērtībām λ_k iegūstam Furjē rindas nogriezni ar $N-1$ locekļiem (saskaitāmiem), kas sakrīt ar PSDS algoritmu.

PSDS metode ir stabilāka salīdzinot ar DS-2, jo īpašvērtības ir lielākas $\lambda_k > \mu_k$.

Šos izvirszījumus ērti lietot analītiskajos pārveidojumos, risinot robežproblēmas ar 1. veida robežnosacījumiem. Jaukta veida problēmas parciālajiem diferenciālvienādojumiem, lietojot taišņu metodi, tiek reducētas uz parasto diferenciālvienādojumu sistēmām, kuras risinot analītiski ar iepriekš aprakstīto spektrālo metodi, veidojot PSDS algoritmus [15].

1. 3. Problēmas ar 3. veida robežnosacījumiem [4,8,17].

PSDS ir iespējams veidot arī problēmām ar 3. veida robežnosacījumiem. Šeit ir zināmas grūtības risinot spektrālās problēmas, jo īpašvērtības var noteikt tikai skaitliski no

atbilstošiem transcendentāliem vienādojumiem. Īpašfunkcijām un īpašvektoriem var uzrakstīt analītiskas izteiksmes atkarībā no skaitliski iegūtajām īpašvērtībām, bet tie nav identiski sakrītoši vienmērīgā režģa mezgla punktos. Tas var izsaukt zināmu neprecizitāti veidojot PSDS algoritmus un tie vairs nav tik efektīvi, kā 1. veida un periodisku robežnosacījumu gadījumos. Grūtības sagādā arī pēdējo diskrēto īpašvērtību μ_N, μ_{N+1} noteikšana, jo literatūrā tām atbilstošie izvestie transcendentālie vienādojumi nav pareizi (skat. A. Samarskis „Diferenču shēmu teorija”, 1977.g., krievu val.). Tāpēc šos vienādojumus bija jāizved no jauna [17].

Tāpat kā iepriekš apskatīsim 1D Puassona vienādojumu ar 3. veida robežnosacījumiem sekojošā formā:

$$-u''(x) = f(x), u'(0) - \sigma_1 u(0) = 0, u'(L) + \sigma_2 u(L) = 0, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0.$$

Atbilstošais diskrētais algoritms (DS) ir:

$$-2(y_1 - y_0)/h^2 + 2\sigma_1 y_0/h = f(0), \quad -(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1})/h^2 = f(x_j), \quad j=1, \dots, N-1,$$

$$-2(y_{N-1} - y_N)/h^2 + 2\sigma_2 y_N/h = f(L),$$

kur $h=L/N$, $x_j = j h$.

Tāpat iegūstam diferencu vienādojumus lineāras algebriskas sistēmas formā (DS-2)

$$Ay=f$$

ar atbilstošu $M=N+1$ -ās kārtas 3-diagonāl- matricu A kuras elementi 1. rindiņā ir

$$1/h^2 \{ 2+2 h \sigma_1, -2, 0 \dots 0 \}, \text{ nākošajās } 1/h^2 \{ -1, 2, -1 \} \text{ un pēdējā}$$

$$1/h^2 \{ 0, \dots, 0, -2, 2+2 \sigma_2 \},$$

kur y, f ir $N+1$ -ās kārtas vektori-kolonas ar elementiem $y_j, f(x_j), j=0, \dots, N$.

Lietojot 2 vektoru y_1, y_2 skalāro produktu

$$[y_1, y_2] = h \sum_{j=1}^{N-1} y_1^j y_2^j + 0.5 h (y_1^0 y_2^0 + y_1^N y_2^N) \text{ var parādīt, ka } [Ay, y] > 0.$$

Atbilstošai diskrētai spektrālai problēmai $Aw^k = \mu_k w^k, k=1, \dots, N+1$

ir šāds atrisinājums (A. Samarskis, 1977.g.)

$$w^k = 1/C_k (1/\sqrt{2} w_0^k, w_1^k, \dots, w_{N-1}^k, 1/\sqrt{2} w_N^k)^T,$$

$$\mu_k = 4/h^2 \sin^2(p_k h/2),$$

kur $w_j^k = \sin(p_k h)/h \cos(p_k x_j) + \sigma_1 \sin(p_k x_j), j=0, \dots, N$ ir īpašvektora w^k komponentes, p_k ir pozitīvās saknes sekojošam transcendentālam vienādojumam

$$\cot(p_k L) = (\sin^2(p_k h) - h^2 \sigma_1 \sigma_2) / (h (\sigma_1 + \sigma_2) \sin(p_k h)), \quad k=1, \dots, N+1.$$

Konstantes $C_k^2 = [w^k, w^k]$ nosaka, ievērojot īpašvektoru ortonormētību.

Eksperimenti ar MATLAB parādīja, ka pēdējās 2 saknes p_N, p_{N+1} nevar iegūt no transcendentālā vienādojuma (tās neatbilst īpašvērtībām, kuras var izskaitļot lietojot MATLAB operatoru "eig"). Izdevās iegūt unikālu parametru

$$Q = L \sigma_1 \sigma_2 / (\sigma_1 + \sigma_2)$$

no kura ir atkarīgas īpašvērtības. Atkarībā no Q vērtībām

var iegūt vienu ($Q < 1$) vai 2 saknes ($Q \geq 1$) no sekojoša jauna transcendentāla vienādojuma, kas satur hiperboliskas funkcijas

$$\coth(p_k L) = (\sinh^2(p_k h) + h^2 \sigma_1 \sigma_2) / (h (\sigma_1 + \sigma_2) \sinh(p_k h)), \quad k=N, N+1.$$

Šajā gadījumā pašvērtības un vektorus nosaka šādi:

$$\mu_k = 4/h^2 \cosh^2(p_k h/2),$$

$$w_j^k = (-1)^j (\sinh(p_k h)/h \cosh(p_k x_j) - \sigma_1 \sin(p_k x_j)), j=0, \dots, N, k=N \text{ vai } k=N+1.$$

Analogi var notikt konstantes $C_k^2 = [w^k, w^k]$.

Nepārtrauktās spektrālās problēmas

$$w''(x) + \lambda^2 w(x) = 0, w'(0) - \sigma_1 w(0) = 0, w'(L) + \sigma_2 w(L) = 0,$$

atrisinājums ir

$$w^k(x) = 1/C_k (\lambda_k \cos(\lambda_k x) + \sigma_1 \sin(\lambda_k x)),$$

kur λ_k ir pozitīvās saknes transcendentālam vienādojumam:

$$\cot(\lambda_k L) = \lambda_k / (\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_1 / \sigma_2 / (\lambda_k (\sigma_1 + \sigma_2)), k=1, 2, \dots,$$

Atrisinājumu var meklēt Furjē rindas formā

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w^k(x), f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k(x),$$

kur $w^k(x)$ ir ortonormētās īpašfunkcijas, $a_k = b_k / d_k$, $b_k = (f, w^k)$, $d_k = \lambda_k^2$.

Diskrētām DS-2 atrisinājumam

$$y = \sum_{k=1}^{N+1} a_k w^k, f = \sum_{k=1}^{N+1} b_k w^k, b_k = (f, w^k), a_k = b_k / d_k, d_k = \mu_k.$$

PSDS un DS-2 matrica A tiek reprezentēta formā $A = WDW^T$, kur diagonālā matrica D satur pirmās $N+1$ nepārtrauktās problēmas īpašvērtības $d_k = \lambda_k$, $k=1, \dots, N+1$. Ja $d_k = \mu_k$, tad mēs iegūstam DS-2 ar 3- diagonālo matricu A .

If $\sigma_1 = \sigma_2 = \infty$ tad iegūstam problēmu ar 1. veida robežnosacījumiem.

Jaukta veida problēmas un robežproblēmas parciālajiem diferenciālvienādojumiem, lietojot taišņu metodi, var tikt reducētas uz parasto diferenciālvienādojumu sistēmām, kuras risinot analītiski ar iepriekš aprakstīto spektrālo metodi, veidojot PSDS algoritmus [17].

2. Hiperboliskā siltuma vadīšanas vienādojuma matemātiskā modelēšana tērauda rūdīšanas procesam [5,8,17].

Latvijā un arī ASV aktīvi tiek modelēts tērauda intensīvās rūdīšanas process, kuru prof. Andris Buiķis 2005. gadā piedāvāja aprakstīt ar hiperbolisko siltuma vienādojumu. Ideja ir kļuvusi par kodolu starptautiskiem pētījumiem, kuros bez Latvijas piedalās ASV, Ukrainas, Horvātijas un Grieķijas zinātnieki.

Tērauda rūdīšanas matemātiskais modelis – jaukta veida problēma hiperboliskajam siltuma vadīšanas vienādojumam tika risināta skaitliski un analītiski, lietojot DS-2 un arī PSDS metodes ar kuru palīdzību tiek aprakstīta intensīvā tērauda rūdīšana sālotā ūdenī, nevis eļļā, kā tas tiek darīts klasiskajā rūdīšanas variantā. H. Kalis kopā ar A. Buiķi, modelējot tērauda rūdīšanas procesu, risinot tiešās un inversās problēmas hiperboliskajam siltuma vadīšanas vienādojumam iegūst rezultātus, kas izsauca ārzemju fiziķu interesi [5].

Jaukta veida problēma tērauda plāksnes gadījumā ir sekojošā formā:

$$\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, x \in (0, L), t \in (0, t_f)$$

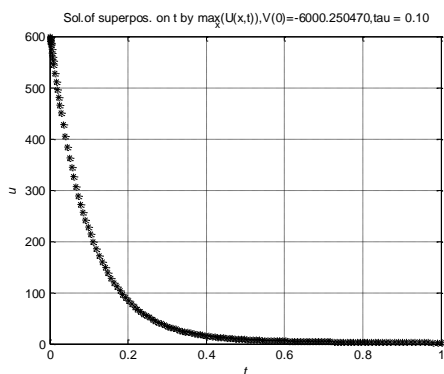
$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} - \alpha_0 (T(0, t) - T_l) = 0, \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} + \alpha_1 (T(L, t) - T_r) = 0,$$

$$T(x, 0) = T_0(x), \frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} = V_0(x).$$

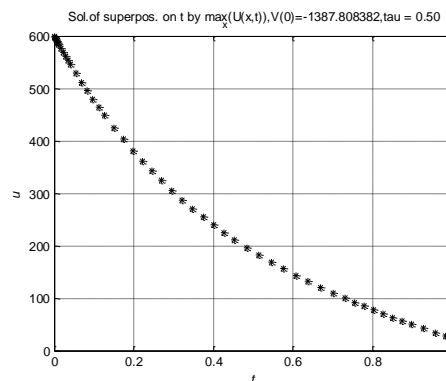
Šeit T ir temperatūra, κ ir siltuma vadīšanas koeficients, α_0, α_1 siltuma apmaiņas koeficienti ar ārējo vidi, kuras temperatūras ir T_l, T_r , τ ir relaksācijas koeficients, kura atšķirīga no nulles vērtība pārvērš parabolisko siltuma vadīšanas vienādojumu par hiperbolisko. Praktiski siltuma ātruma vērtība sākumā $V_0(x)$ nav zināma, bet ir zināma sākuma $T_0(x)$ un beigu temperatūra $T(x, t_f) = T_b(x)$. Tāpēc lai uzzinātu temperatūras sadalījumu $T(x, t)$ un $V_0(x)$ jārisina inversā problēma, kura ir slikti nosacīta t.i. nekorekta. Problēmas analītiskais risinājums galīgas (diskrētas) Furjē rindas (izvirzījuma) formā, lietojot taišņu metodi, spektrālo izvirzījumu DS-2 un PSDS, dod iespēju noteikt izvirzījuma koeficientus funkcijai $V_0(x)$ un noteikt to un temperatūras sadalījumu tērauda plāksnē. Analogi var risināt problēmu lodē un lodē ar caurumu radiālās simetrijas gadījumā. 3D gadījumā (tērauda gabals daudzskaldņa formā) iespējama redukcija uz plāksnes gadījumu, lietojot A.Buiķa konservatīvo viduvēšanas metodi. Attēlos (1., 2.) ir parādīta maksimālās temperatūras atkarība no laika pie dažādiem relaksācijas koeficientiem $\tau=0.1, \tau=0.5$, ja $t_f=1$,

$T_b(x) = T_l = T_r = 0, L=1, T_0=600, \alpha_0=0, \alpha_1=0.071$. Atbilstoši ir iegūts $V_0 = -6000.25$,

$V_0 = -1387.8$ (laikā procesu ilgums ir dažāds).

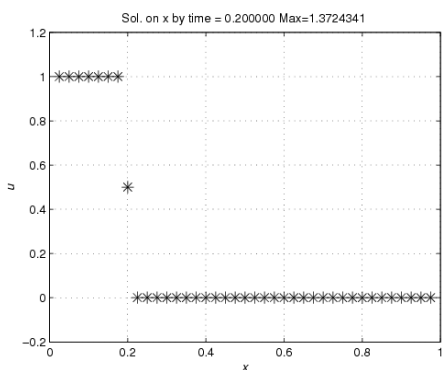


1. attēls ($\tau=0.1$)

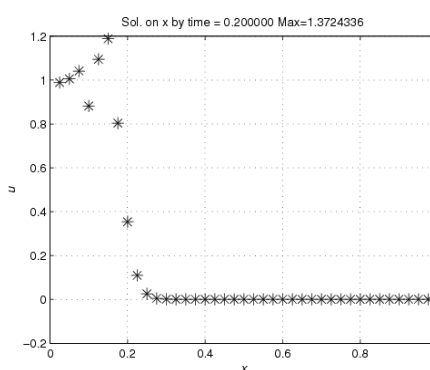


2.attēls ($\tau=0.5$)

Lai pārbaudītu PSDS efektivitāti tika risināta tiešā problēma viļņu vienādojumam (bez saskaitāmā $\frac{\partial T}{\partial t}$, $\tau=1$) un hiperboliskajam siltuma vadīšanas vienādojumam ($\tau=0.1$) ar 1. veida robežnosacījumiem ($\alpha_0 = \alpha_1 = \infty$) $T_l=1$, $T_r=0$, $T_0(x)=V_0(x)=0$. Attēlos (3.,4.) ir parādīts funkcijas $T(x, t_f)$ lēcieni laikā $t=0.2$, risinot viļņu vienādojumu ar PSDS un DS-2, ja $N=30$ (redzama parastās DS svārstības telpā).

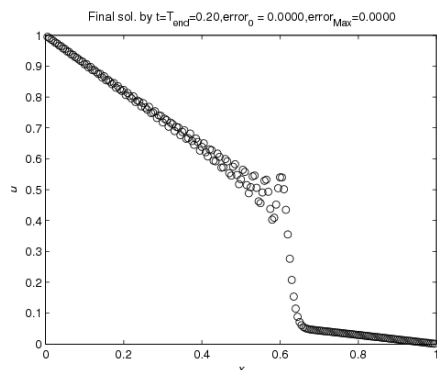


3. attēls ($\tau=1$, PSDS)

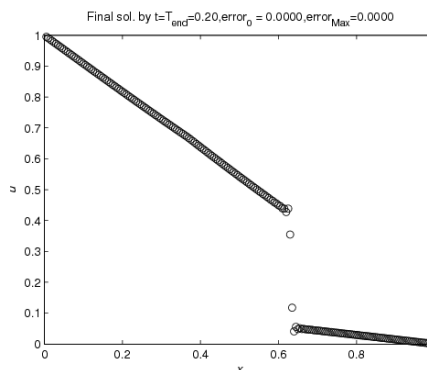


4.attēls ($\tau=1$, DS-2)

Analogi attēlos (5. un 6.) ir parādīti rezultāti, kas iegūti risinot hiperbolisko siltuma vadīšanas vienādojumu atbilstoši ar DS-2 un PSDS, ja $N=200$ (redzamas DS-2 svārstības lēciena punktā).



5. attēls ($\tau=0.1$, DS-2)



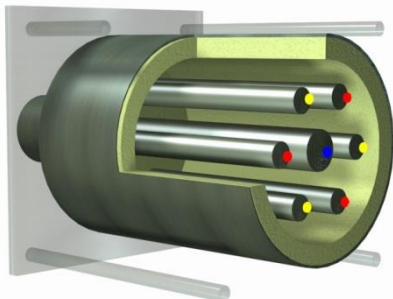
6. attēls ($\tau=0.1$, PSDS)

Darbā [17] ir iegūti rezultāti arī caurumotas lodes rūdišanai kā arī parādītas PSDS priekšrocības salīdzinot arī ar Furjē rindas metodi (skat. tur arī citus piemērus).

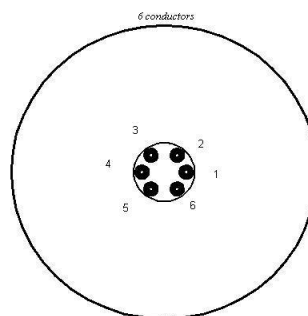
3. Jauna tipa enerģētisko iekārtu matemātiskā modelēšana [2].

Transformatorus, motorus un ģeneratorus var aprakstīt ar kopīgu pazīmi- ar elektronu plūsmu elektromagnētiskās sistēmās. Analogas sakarības ir šķidrums, gāzēs, viesuļu vētrā „Tornado” un citās plūsmās. Šos virpuļu sadalījumus var izmantot jaunu enerģiju veida iekārtās (J. Schatz 2003.g, I.Rechenberg 1988.g). Hidrodinamikā (ideāls šķidrums) ātruma lauka atkarību no virpuļu lauka raksturo tāpat kā elektrodinamikā Bio-Savāra likums. Šādā tuvinājumā tika aprēķināts dažādu virpuļu (riņķveida, spirālveida u.c.) iespaids uz ātrumu sadalījumu caurulē, kanālā un konusā (A.Buiķis, H.Kalis, J. Schatz 2005,2006.g.)

Aktuāla un interesanta problēma ir ēku apkurināšana ar ekoloģiski tīrām un kompaktām, efektīvām ierīcēm. Viena no seniem moderniem lietojumu veidiem ir maiņstrāvas elektriskās enerģijas pārvēršana siltuma enerģijā. Darbā [2] autori pēta vienas tādas ierīces matemātisko modeli. Tas ir garš cilindrs piepildīts ar nesaspiežamu viskozu šķidrumu (elektrolītu), kurā paralēli cilindra asij ir novietoti metāla stieņi (elektrodi), kuriem tiek pievadīta dažādu fāžu maiņstrāva (skat. reālo ierīci ar 6 elektrodiem 7.attēlā). Matemātiskajā modelī pieņem, ka cilindrs ar rādiusu R ir bezgalīgi garš, elektrodi ir novietoti mazāka cilindra ar rādiusu r_0 iekšpusē un apskata 2D temperatūras un šķidruma plūsmas sadalījumu starp diviem koaksiāliem cilindriem to šķērsgriezumā (skat. ierīces modeli 8. attēlā). Agrākajos A. Buiķa un H.Kaļa darbos (CMAM, 2002, 2(3), pp. 247-251; MHD,2004,40(1), pp.77-90; MMA, 2005, 10(1), pp. 9-18) tika modelēti siltuma ģeneratori ar 6 un 9 riņķveida elektrodiem, kuri bija aptīti ap cilindra virsmu. 3D plūsma galīgā cilindrā tika modelēta ar datorprogrammu „Fluent” darbā: A.Buiķis, L. Buligins, H.Kalis, MMA,2009,14(1), pp.1-9.



7. attēls (reālā iekārta)



8.attēls (pētījamais modelis)

Tiek apskatīta stacionārā Navjē –Stoksa vienādojuma sistēma polārajās koordinātēs kopā ar elektromagnētisko (Lorenca) spēku, ko rada maiņstrāva plūstot pa elektrodiem. Aprēķinot avotu locekļus hidrodinamikas un siltuma vadīšanas vienādojumos, izslēdzot spiedienu un ievēdot bezdimensionālās temperatūras $T(r, \varphi)$ un hidrodinamiskās strāvas $\psi(r, \varphi)$ funkcijas problēmu reducē uz robežproblēmu 2 parciālajiem diferenciālvienādojumiem ar periodiskajiem nosacījumiem pa leņķi φ :

$$\Delta^2 \psi = 1/r J(\Delta \psi, \psi) + K_H \langle f \rangle,$$

$$\psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi), \quad \frac{\partial \psi(r, 0)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \psi(r, 2\pi)}{\partial \varphi},$$

$$\psi(\eta, \varphi) = \psi(1, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial \psi(\eta, \varphi)}{\partial r} = \frac{\partial \psi(1, \varphi)}{\partial r} = 0,$$

$$\Delta T = Pr/r J(T, \psi) - K_T \langle j_z^2 \rangle,$$

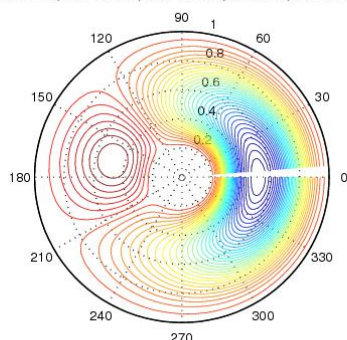
$$T(r, 0) = T(r, 2\pi), \quad \frac{\partial T(r, 0)}{\partial \varphi} = \frac{\partial T(r, 2\pi)}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial T(\eta, \varphi)}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial T(1, \varphi)}{\partial r} = 0,$$

kur K_H, K_T ir avota locekļu parametri, $\langle f \rangle$ -elektrodinamisko spēku viduvētā vērtība laikā,

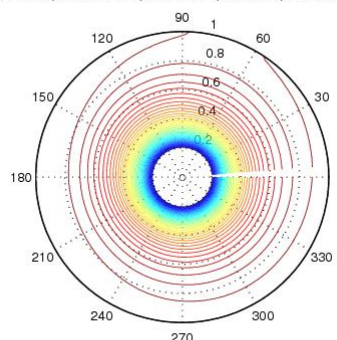
$\langle j_z^2 \rangle$ - strāvas blīvuma viduvētā vērtība, Pr - Prandtlja skaitlis, $\eta=r_0/R$ -cilindru rādiusu attiecība, J –jakobians, Δ -Laplasa operators. Izveidota oriģināla metodika avotu funkciju aprēķināšanai. Lietojot apakšējo relaksācijas metodi un darbības ar cikliskajām matricām ir izveidots algoritms, ar kura palīdzību var noteikt cilindrā maksimālas temperatūras un virpuļu sadalījuma atkarību no elektrodu skaita (3,6 vai 9), novietojuma un maiņstrāvas fāzes nobīdes. Piemēram 6 elektrodu gadījumā rezultāti redzami att. 9. (virpuļu sadalījums) un 10. (temperatūras sadalījums ar maksimālo temperatūru 10.56 vienības). Šī temperatūra iegūta pie fāzu nobīdes 60° un elektrodu novietojuma [1,2,3,4,5,6], kas parādīts 8. attēlā. Ja fāzu nobīde ir 120° , tad maksimālā temperatūra ir 8.22 vienības pie cita elektrodu novietojuma [2,4,6,1,3,5].

Streamline, Max=0.0423, Min=-0.1880, Iter=19.00, Diferr=0.0000



9.attēls (virpuļu sadalījums)

Isoterms, Max=10.5639, Min=1.0000, Iter=57.00, Diferr=0.0000



10.attēls (temperatūras sadalījums)

4. Metāla daļiņu kūdras slāņos matemātisko modelēšanu[14,16,24].

Modelējot 3 kūdras slāņus tika pētīta metālu Ca un Fe koncentrācija kūdras slāņos, risinot 3-D robežproblēmu difūzijas vienādojumam ar gabaliem konstantiem koeficientiem katrā slānī. Izveidotā diferencu shēmā DS-2, ievērojot periodiskos nosacījumus fiksētā virzienā, tiek lietoti ciklisko matricu algoritmi, kas vienkāršo aprēķinus. Skaitliskie rezultāti tiek salīdzināti ar eksperimentiem. Agrāk autoru H.Kalis, E.Teirumnieks, E. Teirumnieka, I.Kangro darbā „Proc. of the 7-th int. scientific practical conference” Environment. Technology. Resources.”, Rezekne higher education institution, June, 2009, pp. 249-253)

tika modelēti 2 kūdras slāņi.

Metāla difūzijas process kūdrā ir apskatīts 3D paralelskaldnī

$$\Omega = \{ (x,y,z) : 0 < x < 1, 0 < y < L, 0 < z < Z \}.$$

Apgabals Ω sastāv no N slāņiem. Tiek modulēta stacionāra 3D difūzijas problēma ar gabaliem-konstantiem difūzijas koeficientiem D_x, D_y, D_z katrā slānī

$$\Omega_i = \{ (x,y,z) : x \in (0,1), y \in (0,L), z \in (z_{i-1}, z_i), i=1, \dots, N \},$$

kur $H_i = z_i - z_{i-1}$ ir slāņa augstums, $z_0 = 0, z_N = Z$.

Jāatrod ir koncentrācijas $c_i = c_i(x,y,z)$ sadalījums katrā slānī Ω_i , risinot sekojošu robežproblēmu parciālajam diferenciālvienādojumam (PDV)- difūzijas vienādojumam:

$$D_{ix} \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} + D_{iy} \frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2} + D_{iz} \frac{\partial^2 c_i}{\partial z^2} = 0,$$

$$c_i = c_{i+1}, D_{iz} \frac{\partial c_i}{\partial z} = D_{(i+1)z} \frac{\partial c_{i+1}}{\partial z}, \text{ ja } z = z_i, i=1, \dots, N-1;$$

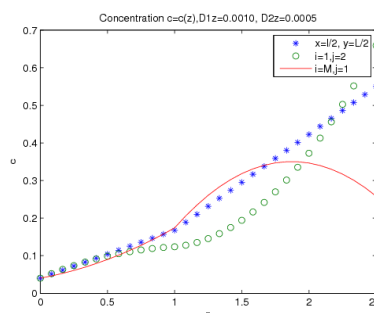
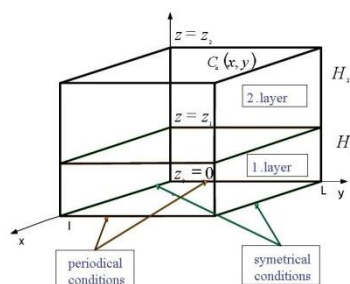
$$c_i(0,y,z)=c_i(l,y,z), \frac{\partial c_i(0,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial c_i(l,y,z)}{\partial x}, \text{ periodiskie nosacījumi } x\text{-virzienā,}$$

$$\frac{\partial c_i(x,0,z)}{\partial y} = \frac{\partial c_i(x,L,z)}{\partial y} = 0, \text{ simetrijas nosacījumi } y\text{-virzienā,}$$

$$\frac{\partial c_i(x,y,0)}{\partial z} = 0, c_N(x,y,Z) = C_a(x,y),$$

kur $C_a(x,y)$ ir dots koncentrācijas sadalījums.

Problēmu 3 slāņos ($N=3$, skat. 11. att.) risina ar A. Buiķa izstrādāto konservatīvo viduvēšanas un DS-2 metodēm, reducējot 3D problēmu uz 2D PDV sistēmu ar cikliskajām matricām x -virzienā. Difūzijas koeficientu attiecību nosaka no 1D difūzijas vienādojuma z -virzienā analītiskā atrisinājuma, vadoties no eksperimentālajiem mērījumiem kūdras starpslāņos. 12.att. redzams koncentrācijas sadalījums z -virzienā, pārējie rezultāti darbā [16].



11. attēls (3 kūdras slāņu shēma)

12. attēls (koncentrācija z -virzienā

3 fiksētos punktos)

5. Magnētizēta izstiepta piliena un diega kustības modelēšana rotējošā magnētiskajā laukā [9,10,11,18,19,26,29]

Auglīgas sadarbības rezultātā ar fizikas prof. A.Cēberu ir publicēti 3 raksti [9,18,19] starptautiski citējamās (SI) žurnālos un iesniegts publicēšanai raksts [29] par ferromagnētisku daļiņu – izstieptu pilienu kustību ārējā rotējošā magnētiskajā laukā, izejot no piliena dinamikas un liekuma vienādojumiem. Procesu apraksta nelineāri 2D paraboliska tipa daļējie diferenciālvienādojumi, kurus risina skaitliski ar taišņu metodes palīdzību, aizstājot otrās vai ceturtās kārtas atvasinājumus pēc telpiskā mainīgā ar 2. kārtas aproksimācijas galīgajām diferenciālvienādojumiem. Vienādojumiem ar otrās kārtas atvasinājumiem tiek veidotas DS-2, PSDS un parasto diferenciālvienādojumu sistēmas laikā t ar vienādojumu skaitu 100 – 200, kuras tiek realizētas ar datorprogrammu MATLAB.

5.1. Izstiepta feromagnētiska piliena kustības modelēšana ārējā rotējošā magnētiskā laukā [10,19,29]

Izstiepta piliena kustību ārējā rotējošā magnētiskā laukā apraksta nelineārs paraboliska tipa vienādojums ar zīmju mainīgu difūzijas koeficientu (skat. 13.att. kur difūzijas koeficients F' ir funkcijas F atvasinājums). Tā kā šī koeficienta vērtības ir vietām vienādas ar nulli (un pat negatīvas), tad līdz ar to veidojas lēcienveidīgs atrisinājums. Šo atrisinājumu varēja iegūt modificējot vienādojumu ar papildus ievestu regularizācijas saskaitāmo, kas satur augstākas kārtas parciālos atvasinājumus. Regularizāciju izdevās iegūt arī aizvietojoš nemonotono zīmju mainīgo difūzijas koeficientu F' ar modificētu pozetīvu funkciju (skat.14. att.) Lietojot PSDS un MATLAB solveru „ode15s” izdevās aprēķināt šo problēmu arī tieši bez regularizācijas. Rezultātos tiek zīmētas dažādas magnētisko pilienu konfigurācijas un formas (S-veida, 8-veida un spirālveida).

Izstieptā piliena kustību apraksta šāds bezdimensionāls diferenciālvienādojums

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial l^2} F(\beta) - \varepsilon \frac{\partial^5 \beta}{\partial l^4 \partial t} + \omega \tau,$$

kur $F(\beta) = \frac{1}{B_m} \beta + \sin(2\beta)$ ir nelineāra funkcija (13. att.), $\beta(l,t)$ ir fāzes nobīde ar leņķi, ko veido lokālā pieskare piliena centra līnijai ar abcisas asi, ω ir leņķiskā frekvence, τ ir laika mēroga koeficients, ε ir mazs koeficients (ap 10^{-4}), B_m ir magnētiskais Bonda skaitlis,

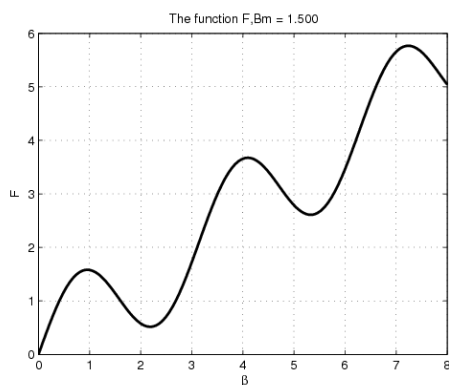
l ir loka garums, $0 < l < L$, t – laiks, $0 < t < t_f$.

Regularizācijas loceklis ar ε ir pievienots no fizikāliem apsvērumiem. Funkcija $F(\beta)$ nav monotona, ja $B_m > 0.5$. Vienādojumu pavada robežnosacījumi

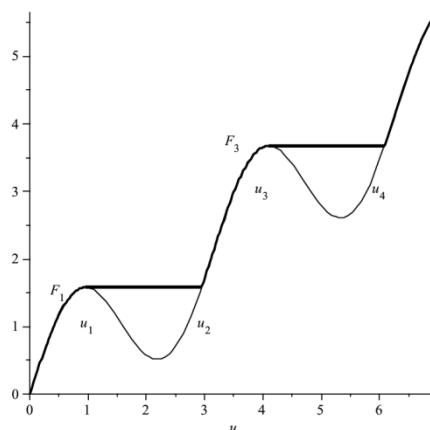
$$\beta(0,t) = \beta(L,t) = \frac{\partial^2 \beta(0,t)}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 \beta(L,t)}{\partial l^2} = 0$$

un sākuma nosacījumi $\beta(x,0) = \beta_0(x)$, kur $\beta_0(x)$ ir dota funkcija (parasti $\beta_0(x) = 0$ - sākuma piliena forma ir taisna).

Ja $\varepsilon = 0$, tad iegūstam nekorektu problēmu. Tālāk apskatīsim pilienu ar garumu $L=2$.



13. attēls (funkcija F)



14. attēls (modificētā funkcija F)

Piliena formu iegūst, integrējot sekojošus vienādojumus

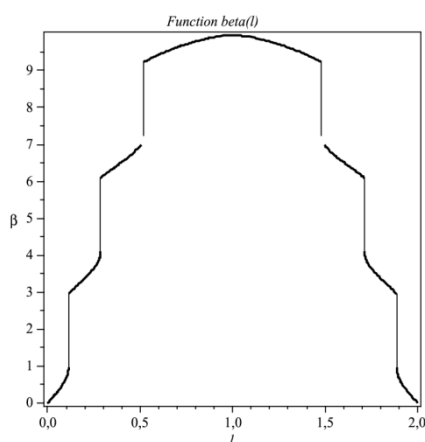
$$\frac{dx}{dl} = \cos(\beta), \quad \frac{dy}{dl} = -\sin(\beta).$$

Integrācijas konstantes nosaka no nosacījuma, ka piliena masas centrs paliek nekustīgs.

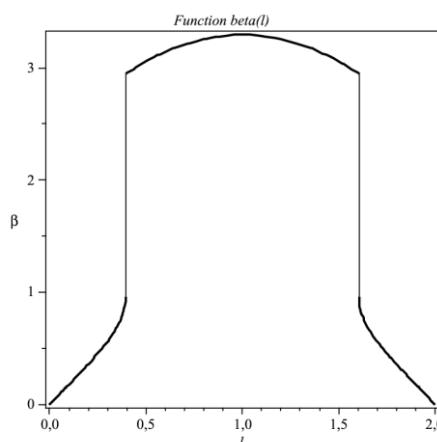
Stacionāro atrisinājumu $\beta_s(l)$ nosaka ar robežnosacījumiem

$$\beta_s(0) = \beta_s(2) = 0 \quad \text{no transcendentāla vienādojuma formā} \quad F(\beta_s(l)) = 0.5l(2-l)\omega\tau.$$

Maksimālo vērtību β_m iegūstam no vienādojuma $F(\beta_m) = 0.5\omega\tau$. Atrisinājums $\beta(l, t) > 0$ ir simetrisks attiecībā pret $l=1$. Leņķis β kā funkcija no loka garuma l ir pārtraukta, ja $\omega\tau > 2 F(\beta_0)$, kur β_0 ir vienādojuma $F(\beta)=0$ sakne (funkcijas F maksimālā vērtība). Vērtība $\omega_c = (\omega\tau)_0 = 2 F(\beta_0)$ definē kritisko frekvenci. 15. un 16. attēlos ir redzams stacionārais atrisinājums ar 3 lēcieniem ($\omega\tau=15$) un ar 1 lēcieni ($\omega\tau=5$).



15. attēls (stacionārais atr. $\omega\tau=15$)



16. attēls (stacionārais atr. $\omega\tau=5$)

Modificētā funkcija F (14. att.) ir monotona ar ierobežotu atvasinājumu

$0 < F'(\beta) < 2 + 1/B_m$ un vienādojuma ar $\varepsilon=0$ atrisinājumam ir spēkā apriorie novērtējumi un tas pieder Soboleva telpai $w_2^1(0,2)$ katrai fiksētai laika vienībai t .

Dotā problēma tiek risināta ar datorprogrammu Matlab, lietojot laikā taisņu metodi un telpā galīgo diferencu metodes, aproksimējot telpiskos atvasinājumus ar centrālajām diferencēm ar otro aproksimācijas kārtu (DS-2).

Mēs apskatām telpā vienmērīgu režģi $l_j = jh, j = 0, \dots, N, Nh = 2$.

Iegūstam diskrēto problēmu sākuma vērtības problēmas $N-1$ parasto diferenciālvienādojumu sistēmas formā

$$(E + \varepsilon B) \frac{dU(t)}{dt} + A F(U(t)) = G, \quad U(0) = U_0,$$

kur E ir vienības matrica, A ir standarta $N-1$ –ās kārtas 3-diagonālā matrica ar elementiem $1/h^2 \{-1; 2; -1\}$, kura aproksimē 2. kārtas atvasinājumu $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$,

$B = A * A$ ir $N-1$ –ās kārtas 5-diagonāla matrica ar elementiem $1/h^4 \{1; -4; 6; -4; 1\}$, kura aproksimē 4. kārtas atvasinājumu $\frac{\partial^4}{\partial t^4}$,

$U(t), U_0, F(U), G$ ir $N-1$ –ās kārtas vektori – kolonas ar elementiem

$$u_j(t) \approx \beta(l_j, t), \quad f_j(u) \approx F(u_j(t)), \quad g_j = \omega \tau, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Diferenciālvienādojumus var pierakstīt formā

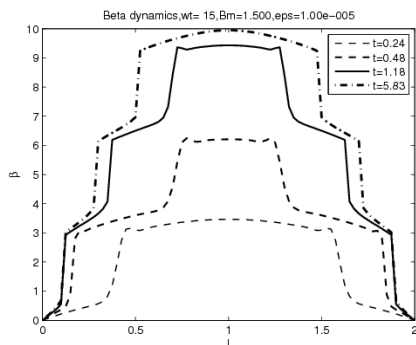
$$\frac{dU(t)}{dt} = (E + \varepsilon B)^{-1} (G - A F(U(t))).$$

Veidojot precīzā spektra diferencu shēmu (PSDS) matricas A un A^2 ir aizvietotas ar to spektrālo reprezentāciju WDW un WD^2W , kur $W = W^{-1}$ ir simetriska ortogonāla matrica ar elementiem $w_{j,k} = \sqrt{2/N} \sin(\pi j k/N)$, $j, k = 1, \dots, N-1$ un diagonālā matrica D satur skaitā

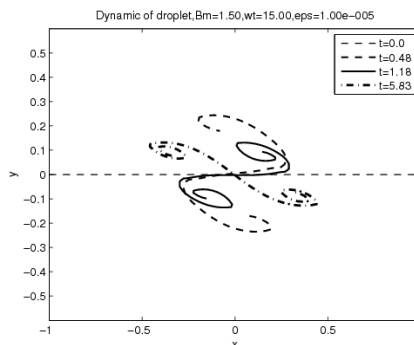
$N-1$ diferenciālā operatora $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ īpašvērtības $d_k = (\pi k/2)^2$ (parastai diferencu shēmai $d_k = 4/h^2 \sin^2(0.5 \pi k/N)$).

Skaitliskie rezultāti tika iegūti ar Matlab, ja $B_m = 1.5, \omega \tau = 5; 8; 15, t_f = 3; 5; 6,$

$\varepsilon = 0; 10^{-4}$. Laika moments t_f ir tas laiks kad nestacionārais atrisinājums jau ir nokonverģējis uz stacionāro atrisinājumu. Augot frekvencei piliens vairāk pieņem spirālveida formu. 17. un 18. attēlā redzama atrisinājuma un piliena formas dināmika laikā, ja $\varepsilon = 10^{-4}, \omega \tau = 15$.



17.attēls (β dināmika)



18.attēls (formas dināmika)

Darbā [29] tiek modelēta histerēzes parādība, kas rodas mainot lauka frekvenci.

5.2. Feromagnētiska elastīga diega (stieņa) kustības modelēšana ārējā rotējošā magnētiskā laukā, izmantojot dinamikas un liekuma vienādojumus [9,11,18]

Apzīmēsim funkcija $q(l,t)$ parciālo atvasinājumu $\frac{\partial q(l,t)}{\partial l}$ ar $q'(l,t)$. Izmantojot

spēka un momenta izteiksmes elastīga stieņa ātruma $\mathbf{v}(l,t) = \frac{\partial \mathbf{r}(l,t)}{\partial t}$ vienādojumu 2D diega šķēlumā var pierakstīt formā

$$\zeta \mathbf{v} = -A_0 \mathbf{r}^{(4)} - M \mathbf{n}' + (\tilde{\Lambda} \mathbf{t})',$$

kur $\mathbf{r}=(x,y,0)$ 2D vektora koordinātes, \mathbf{t} , \mathbf{n} ir elastīgā diega centra līnijas pieskares un normāles vektori,

$$\mathbf{t}=(x', y',0), \mathbf{n}=(-y', x',0),$$

$\mathbf{r}^{(4)}$ ir 4.tās kārtas parciālais atvasinājums pēc telpas mainīgā l ,

$\tilde{\Lambda} = \Lambda - 1.5 A_0 K^2$, $K=K(l,t)$ ir centra līnijas liekums,

$\Lambda = \Lambda(l,t)$ ir Lagranža rizinātāji,

A_0 ir izliekuma modulis,

ζ ir hidrodinamiskais pretestības koeficients,

M ir disipatīvais spēka moments uz 1 diega garuma vienību.

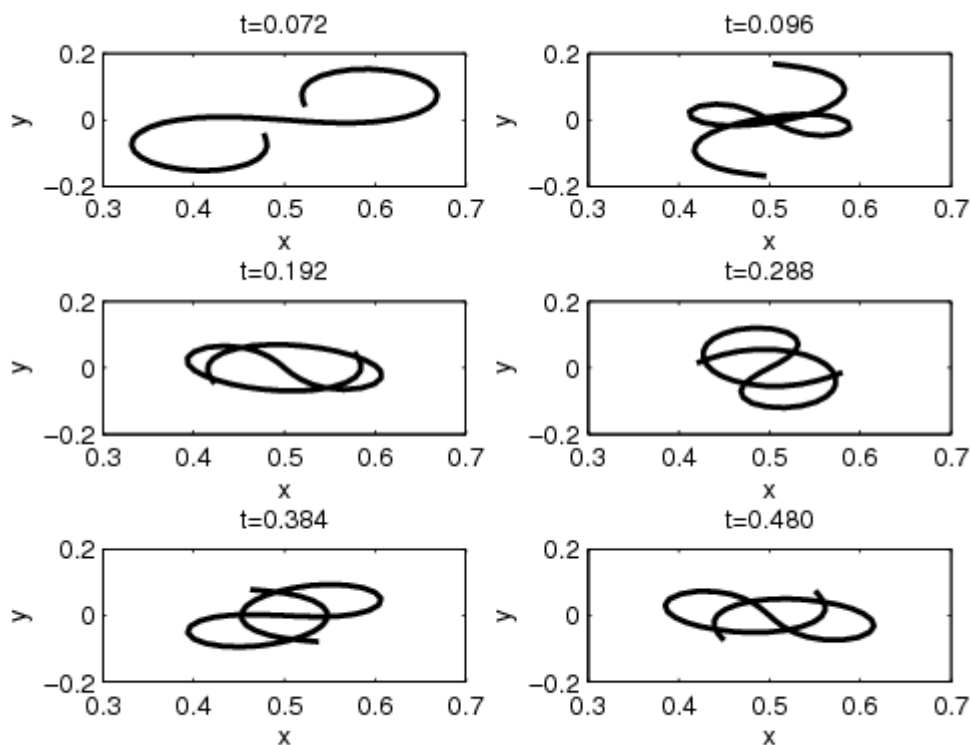
Lai atrisinātu diega dināmas 3D vienādojumus ievadam $N+1$ punktu vienmērīgu režģi l_k ar soli h loka mainīgajam l . No diega neizstiepšanās nosacījuma seko ierobežojums vienādojuma formā $\mathbf{g}_k = (\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k)^2 = h^2$, $k=1, \dots, N$.

Ievedot $N * 2(N+1)$ kārtas Jakobi matricu \mathbf{J} ar elementiem $\frac{\partial g_k}{\partial r_j}$ seko, ka $\mathbf{J} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Lietojot projekcijas operatoru $P = E - J^T (J J^T)^{-1} J$, (E ir vienības matrica) mēs diskretizējam dinamikas vienādojumus ar centrālajām diferencēm bez

saskaitāmā $(\tilde{\lambda} \ t)'$ $N+1$ parasto diferenciālvienādojumu sistēmas formā, kuru skaitliski risina ar Matlab pie dažādām magnetoelastīgā skaitļa $C_m = M L^2 / A_0$ vērtībām [9].

19. att. redzama formu dinamika, ja $C_m = 300$.



19. attēls (formu dināmika, $C_m = 300$, $t < 0.49$)

Nelielām C_m vērtībām veidojas S-tipa diega formas, kuras rotē ap smaguma centru pieliktā momenta virzienā. Lielām C_m vērtībām veidojas pie brīvo diega galiem cilpas (19. att.), kuras stacionārā gadījumā rotē pieliktā spēka momenta virzienā.

Tālāk apskatīsim magnētiskā diega līknes iekšējo dināmiku, izejot no **liekuma** vienādojumiem. Spēka vektoram \mathbf{F} ir spēkā sekojoša izteiksme $\mathbf{F} = -A_0 \mathbf{r}''' - M \mathbf{n} + \tilde{\lambda} \mathbf{t}$.

No Frenē vienādojumiem $\mathbf{t}' = -K \mathbf{n}$, $\mathbf{n}' = K \mathbf{t}$ un izteiksmēm

$\mathbf{t} = \mathbf{r}'$, $\mathbf{n} \mathbf{t} = 0$, $\mathbf{n} \mathbf{n} = 1$, $\mathbf{v} = v_n \mathbf{n} + v_t \mathbf{t}$, (v_n , v_t ir normālā un tangenciālā ātruma komponentes) iegūstam liekuma vienādojumu sekojošā formā

$$\frac{\partial K(l, t)}{\partial t} = -(v_n'' + K^2 v_n) + v_t K'$$

To pārveidojot, iegūstam

$$\zeta \frac{\partial K(l, t)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial^2 K(l, t)}{\partial l^2} + K^2 \right) (A_0 (K'' + 0.5 K^3) - \Lambda K) + K'(\Lambda' - MK)$$

No diega neizstiepšanās nosacījuma formā

$$v_t' = -A_0 K K'' - 0.5 A_0 K^4 + \Lambda K^2, \text{ iegūstam vienādojumu}$$

$$\Lambda'' - M K' + A_0 (K K'' + 0.5 K^4) - \Lambda K^2 = 0$$

un diega liekuma vienādojums pieņem formu

$$\zeta \frac{\partial K(l, t)}{\partial t} = -A_0 (K^{(4)} + 3.5 K^2 K'' + 3 K (K')^2 + K^5) + 2 \Lambda K^3 + 3 \Lambda' K' + \Lambda K''.$$

Pārveidojot vienādojumus bezdimensionālā formā iegūst 2 parciālo vienādojumu sistēmu:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -K^4 - 3.5 K^2 K'' - 3 K (K')^2 - K^5 + 2 \Lambda K^3 + 3 \Lambda' K' + \Lambda K'',$$

$$\Lambda'' - C_m K' + K(K'' + 0.5 K^3) - \Lambda K^2 = 0.$$

Ja diega abi gali $l=0, l=1$ ir brīvi iegūstam robežnosacījumus :

$$K(0, t) = \Lambda(0, t) = K(1, t) = \Lambda(1, t) = 0, K'(0, t) = K'(1, t) = C_m.$$

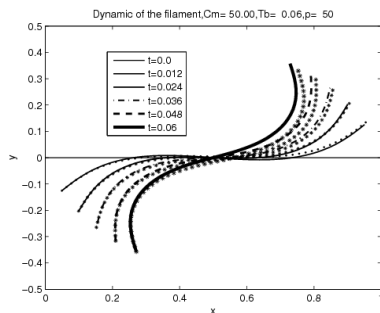
Ja tikai viens gals $l=0$ ir brīvs, tad $K(0, t) = \Lambda(0, t) = 0, K'(0, t) = C_m,$

$$K'(1, t) = \Lambda'(1, t) = K''(1, t) = 0.$$

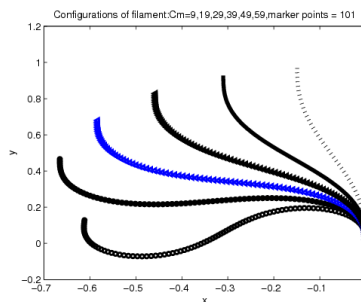
Diega formu iegūst no Frenē vienādojumiem

$$x'' = K y', \quad y'' = -K x'.$$

Stacionāram atrisinājumam $x=x(l), y=y(l)$ sākuma nosacījums pie $l=0$ (fiksēts gals) ir $x(0)=y(0)=0, y'(0)=0, x'(0)=1$. Lai salīdzinātu diega dinamiku pēc abām metodēm šos nosacījumus fiksētā laikā izvēlas no rezultātiem, kas iegūti tieši integrējot kustības vienādojumus. Iegūti labi sakrītoši rezultāti (skat. 20.att., kur pie $C_m=50$ ar nepārtrauktām līnijām ir attēlotas formas, kas iegūtas integrējot tieši kustības vienādojumus, bet ar raustītām formas, kas iegūtas no liekuma vienādojumiem). 21. attēlā ir parādīti stacionārie atrisinājumi, kas ir iegūti pie $C_m=9, 19, 29, 39, 49, 59$. Aprēķinos ar Matlab tiek lietots diskretizācijai telpā vienmērīgais režģis $l_j=(j-1)h, h=1/N, j=1, \dots, N+1$ un speciāla galīgo diferencu shēma Lagranža reizinātāju aproksimācijai [9].



20. attēls



21. attēls

6. Nelineāras siltuma plūsmas modelēšana [7]

Darbā [7] apskatīts nelineārs siltuma vadīšanas vienādojums, kas rodas modelējot „eksplodējošas, sprādzienvēda,” (angliski „blow-up”) disipatīvas 1D un 2D siltuma plūsmas starp 2 koaksiāliem cilindriem. Šādas plūsmas intensīvi tika pētītas no 1970.-1990.g. akadēmiķa A.Samarska un viņa skolnieku darbos, piem. grāmatā ” ”Eksplozija” kvazilineāru paraboliska tipa vienādojumu problēmās”1987.g krievu val.. Mēs apskatām 2D problēmu divu slāņu vidē starp 2 koaksiāliem cilindriem. Lietojot taisņu metodi, DS un PSDS ar cikliskajām matricām jaukta veida problēmu reducē uz sākuma vērtību problēmu nelineārai parasto diferenciālvienādojumu sistēmai, kuru iteratīvi risina skaitliski lai iegūtu stacionāros atrisinājumus. 1D jaukta veida problēmu polārajās koordinātēs pieraksta šādi:

$$\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial u^{\sigma+1}(r,t)}{\partial r} \right) + a u^{\beta}(r,t), \quad r \in [r_0, R], \quad t > 0,$$

$$u(r_0, t) = U(R, t) = 0, \quad u(r, 0) = u_0(r),$$

kur $\sigma \geq 0$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$, $a \geq 0$ ir konstanti parametri, $u_0(r) \geq 0$ ir dota funkcija. Ja vide nav homogēna, bet sastāv no vairākiem slāņiem rādiusa r virzienā, tad koeficienti λ , a var būt dažādi. Darbā H.Kalis I.Kangro, A.Gedroics, IJPAM, vol. 71, Nr. 1, 2009, 575-592 tiek risināta šī problēma vienā slānī Dekarta koordinātēs. Darbā [7] polārajās koordinātēs ar radiālo simetriju homogēnā un 2-slāņu vidē iegūti teorētiski novērtējumi, kad atrisinājums kļūst stacionārs, izzūdošs vai „eksplodējošs”, t.i. galīgā laika momentā tiecas uz bezgalību.

2D apgabalam $\{ (r, \varphi, z): r_0 < r < R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$ kas satur termiski vadošu materiālu ar konstantu temperatūru $u=0$ uz cilindru virsmām, slāņainā vidē iegūstam jaukta veida problēmu temperatūrai $u=u(r, \varphi, t) \geq 0$, kas apmierina nelineāru siltuma vadīšanas vienādojumu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \Delta g(u) + a f(u), \quad r \in [r_0, R], \quad t > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

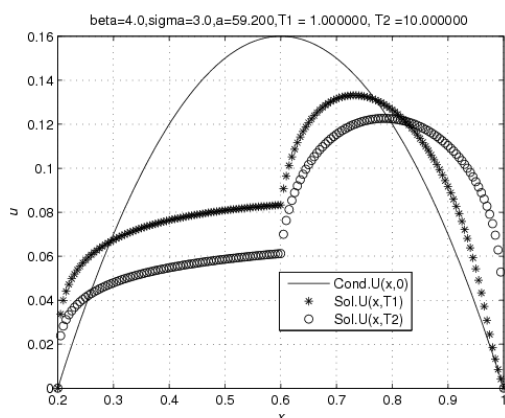
kur katrā slānī parametri λ , a ir gabaliem konstanti, uz slāņu robežām ir spēkā nepārtrauktības nosacījumi, Δ ir Laplasa operators polārajās koordinātēs,

nelineārās pakāpju funkciju formā ir $g(u) = u^{\sigma+1}$, $f(u) = u^{\beta}$.

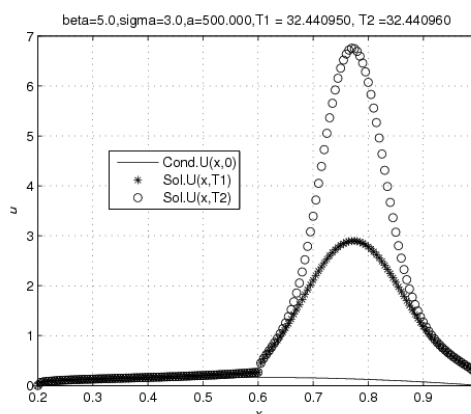
Diskrētā gadījumā 2 slāņos ($\lambda_1=100, \lambda_2=1, r_0=0.2, R=1, r_1=0.6$ - slāņu robeža), lietojot Gausa izslēgšanas (faktorizācijas) metodi ar cikliskām matricām, iegūstam stacionāro atrisinājumu (22. att.), ja $\sigma=3, \beta=4, a=\mu_1=59.2001$ (μ_1 ir Laplasa operatora 2 slāņos ar radiālo simetriju 1. īpašvērtība) un „sprādzienvēida” atrisinājumu (23.att.), ja $\sigma=3, \beta=5, a=500$, kas lokāli tiecas uz bezgalību punktā $r=0.75$ fiksētā laika momentā $t=32.44097$ (attēlā redzami 2 laika momenti $T_1=32.44095$ un $T_2=32.44096$, kuri savā starpā maz atšķiras, bet temperatūra mainās ļoti strauji).

Teorētiski un skaitliski darbā ir parādīts, ka

- 1) $\beta < \sigma+1$, tad atrisinājums laikā tiecas uz nulli visiem $a>0$,
- 2) $\beta = \sigma+1$, $a < \mu_1$, tad arī atrisinājums laikā tiecas uz nulli; $a = \mu_1$, tad iegūst stacionāro atrisinājumu atšķirīgu no nulles; $a > \mu_1$, tad atrisinājums laikā tiecas globāli visā intervālā uz bezgalību fiksētā laika momentā,
- 3) $\beta > \sigma+1$, tad pietiekami lielām a vērtībām atrisinājums tiecas fiksētā laika momentā lokāli uz bezgalību, t.i. veidojas „sprādzienvēida” atrisinājums.



22. attēls ($\sigma=3, \beta=4$)



23.attēls($\sigma=3, \beta=5$)

7. MHD plūsmu modelēšana [3,22,27,30,32]

Maisot dažādus elektrības vadošus nesaspiežamus šķidrumus magnētiskajā laukā, piemēram izkausētu šķidru metālu, svarīgi ir iepriekš tehnoloģiskos lietojumos uzzināt tā struktūru, virpuļu rašanos vai izzušanu atkarībā no parametriem.

Darbā [3] tāds šķidrums atrodas starp 2 koaksiāliem bezgalīgiem cilindriem, kuru virsmas var rotēt. Iekārtai tiek pievadīts dažāda veida (homogēns, radiāls, aksiāls, dipolārs) ārējais magnētiskais lauks. Procesu apraksta t.s. bezindukcijas tuvinājums, kad inducētā magnētiskā lauka izmaiņas neievēro. Magnetohidrodinamiskā (MHD) plūsma, ko cilindriskā apgabala šķērsgrīzumā inducē ārējais magnētiskais lauks tiek aprēķināta ar galīgo diferencu metodi, lietojot ciklisko matricu izskaitļošanas algoritmus.

Ārējais magnētiskais lauks veido radiālās $F_r(r,\varphi)$ un azimutālās

$F_\varphi(r, \varphi)$ Lorentca spēka vektora \mathbf{F} komponentes. Spēka \mathbf{F} vektora rotora aksiālā komponente izsauc šķidrums kustību ar ātruma vektora \mathbf{V} radiālo $V_r(r, \varphi)$ un aksiālo

$V_\varphi(r, \varphi)$ komponentēm (24. att. ar homogēno magnētisko lauku), kuru var aprakstīt ar stacionāriem Navjē-Stoksa vienādojumiem gredzenā (r, φ) : $r_0 < r < R$.

No 2D Lorenca spēka vektora $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ magnētiskā laukā ar indukcijas vektora komponentēm $B_r(r, \varphi), B_\varphi(r, \varphi)$ var iegūt, ka

$$F_r = -\sigma B_\varphi (V_r B_\varphi - V_\varphi B_r + E_z), \quad F_\varphi = \sigma B_r (V_r B_\varphi - V_\varphi B_r + E_z),$$

kur $E_z = \text{const}$ ir elektriskā lauka E azimutālā komponente, $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$ strāvas blīvuma vektors, kurš nosakās no Oma likuma, σ ir elektrības vadāmība.

Cilindra virsmas $r=R$ un $r=r_0$ rotē ar ātrumu $V_\varphi = r_0 \Omega_0$ un $V_\varphi = R \Omega_1$, kur Ω_0, Ω_1 ir atbilstošie leņķa ātrumi.

Izslēdzot spiedienu no Navjē-Stoksa vienādojumiem un ievēdot strāvas funkciju ψ ar sakarībām

$$V_r = r^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad V_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$
 iegūst 4. kārtas bezdimensionālo parciālo diferenciālvienādojumu

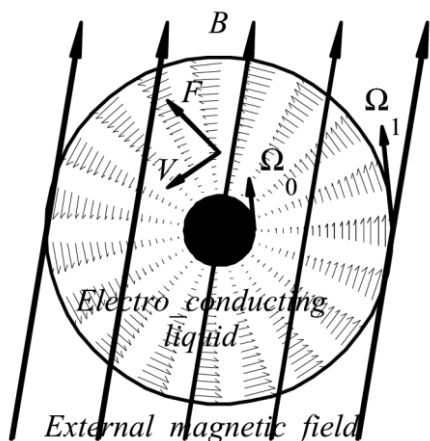
$$r^{-1} J(\Delta \psi, \psi) = \text{Re}^{-1} \Delta^2 \psi - S f,$$

kur f spēka \mathbf{F} rotora aksiālā komponente,

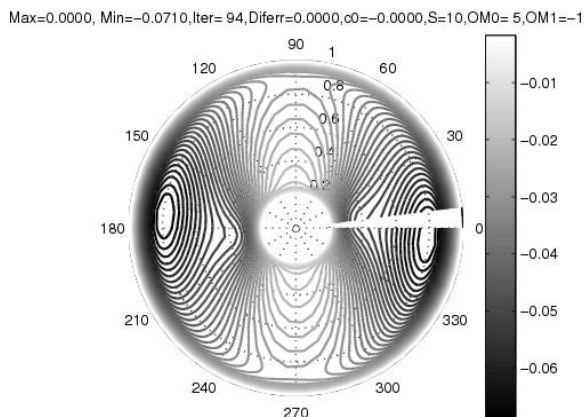
J ir 2 funkciju jakobiānis, Δ - Laplasa operators polārajās koordinātēs,

$\text{Re} = U_0 R / \nu$ - Reynoldska skaitlis, $S = \sigma B_0^2 R / (\rho U_0)$ - Stjuarta skaitlis (U_0, B_0 ātruma un magnētiskās indukcijas raksturīgie lielumi, ν - kinemātiskā viskozitāte, ρ - šķidrums blīvums). Lietojot galīgo diferencu un apakšējās relaksācijas metodes, izskaitļojot atklāti biharmonisko operatoru ar faktorizācijas (Gausa izslēgšanas) metodi iegūti skaitliskie rezultāti atkarībā no magnētiskā lauka veida un parametriem Re un S . 25.att. redzams virpuļu sadalījums starp cilindriem homogenā magnētiskā laukā, ja $r_0 = 0.2, R = 1, \text{Re} = 100, S = 10$,

$\Omega_0 = 5, \Omega_1 = -1$ un iekšējais cilindrs ir paramagnētisks ar bezgalīgi lielu relatīvo permabilitāti.

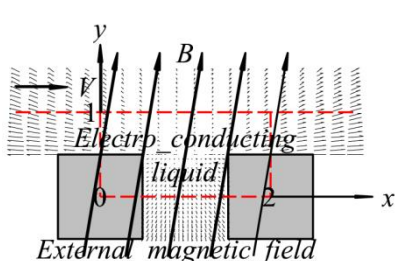


24.attēls (iekārtas shēma)

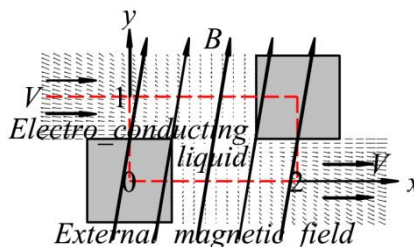


25. attēls (cilindri griežas pretēji)

Darbā [30] tiek modelēta bezgalīgi daudz periodiski novietotu kvadrātisku cilindru 2D aptecēšana ar viskozu elektrovadošu nesaspiežamu šķidrumu homogenā magnētiskā laukā. Tiek apskatīti 2 dažādi cilindru novietojumi: paralēlās rindās un 2 dažādās pārbīdītās paralēlas rindās. Ievērojot periodiskuma un simetrijas nosacījumus aprēķinos tiek izvēlēta 1 sekcija no 2D apgabala, kas satur 2 cilindrus (26. un 27. att.)



26.attēls (paralēlas rindas)



27.attēls (2 dažādas paralēlas rindas)

Ārējais 2D bezdimensionālais magnētiskais lauks satur 2 indukcijas vektora komponentes:

$B_x = \cos(\alpha)$, $B_y = \sin(\alpha)$, kur α ir leņķis starp Ox- asi un indukcijas vektoru. Tiek apskatīti vairāki magnētiskā lauka veidi: paralēls Ox -asij ($\alpha=0$), transversāls ($\alpha=\pi/2$) un slīps ($\alpha=\pi/4$ vai $\alpha=3\pi/4$). Magnētiskais lauks veido Lorenca spēka \mathbf{F} divas komponentes

$$F_x = -\sigma B_x (V_x B_y - V_y B_x + E_z), F_y = \sigma B_x (V_x B_y - V_y B_x + E_z)$$

kur $E_z = \text{const}$ irelektriskā lauka E aksiālā komponente, V_x , V_y ir ātruma vektora \mathbf{V} komponentes. Vektora rot \mathbf{F} z- komponente izsauc šķidruma kustību, kuru apraksta Navjē-Stoksa vienādojumi Dekarta koordinātēs.

Ievedot strāvas funkciju ψ un izslēdzot spiedienu iegūstam 2 vienādojumu sistēmu

$$0 = J(\psi, \zeta) + \text{Re}^{-1} \Delta \zeta + S f, \quad \zeta = -\Delta \psi,$$

kur f ir vektora rot \mathbf{F} z -komponente, J – jakobiānis, ζ - virpuļu funkcija .

Lietojot galīgo diferencu un apakšējās relaksācijas metodes aprēķinu rezultāti atkarībā no Reynoldsa Re , Stjuarta S skaitļiem un homogēnā lauka virziena ir doti darbā [30] kopā ar daudziem attēliem.

8. Elektronu plūsmas modelēšana žiratronā [12,20,21].

Vairāku autoru iesniegtajos darbos tiek pētīta un skaitliski modelēta nelineāra kompleksa Šrēdingera tipa parciālo diferenciālvienādojumu sistēma, kas apraksta vienas vai vairākas elektronu RF lauka amplitūdu svārstību modas $f(x,t)$ žiratronā un transversālo orbitālo momentu $p(x,t)$ atkarībā no laika t un no x segmentā $[0,L]$. Darbs [20] tiek veidots kā pārskata raksts par vairāku gadu pētījumiem programmā EIRATOM un par pēdējiem sasniegumiem šajā virzienā.

Mēs analizējam divas žiratrona rezonatora versijas: jaunā (pēc 2008.g.) un vecā. Augstas frekvences RF lauka amplitūdas $f(x,t)$ rezonatorā un elektronu transversālā orbītas momentu $p(x,t,\theta)$ ar parametru θ ($0 < \theta \leq 2\pi$) var aprakstīt ar kompleksu diferenciālvienādojumu sistēmu (jaunā versija):

$$\frac{\partial p}{\partial x} + i(\Delta + |p|^2 - 1 - gb) p = if(t,x),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - i(1+\delta) \frac{\partial f}{\partial t} + (1+0.5(\delta + gc)) gd f = (1+\delta)(1+gc)^2 I \langle p \rangle,$$

kur i ir imaginārā vienība, $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$ ir aksiālā un laika koordinātes, L – interaktīvā lauka garums, Δ , δ , θ - reālas konstantes, I – strāvas stiprums, $gb(x)$, $gc(x)$, $gd(x)$ – dotas reālas telpas mainīgā x funkcijas, $\langle p \rangle$ videjotā (integrālā) pēc θ mainīgā p vērtība.

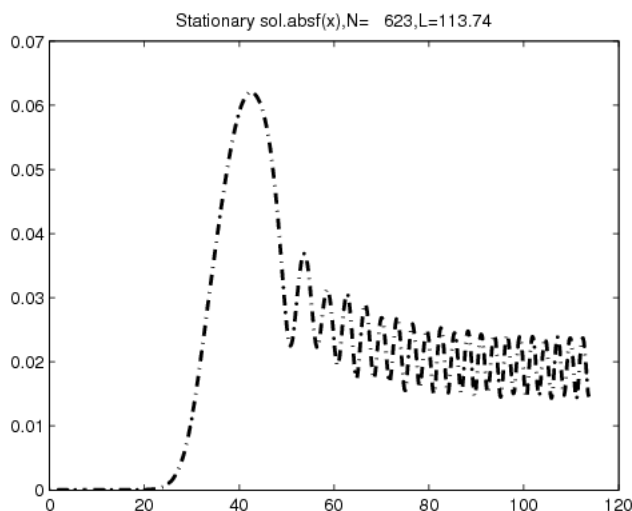
Sistēmu pavada sākuma nosacījumi $p(t,0,\theta) = \exp(i\theta)$, $f(0,x) = f_0(x)$,

$$\text{un robežnosacījumi } f(0,t) = 0, \quad \frac{\partial f(L,t)}{\partial x} = -i\gamma f(t,L),$$

kur $f_0(x)$ ir dota kompleksa funkcija, γ ir pozetīvs parameters.

Žiratrona vecajai versijai $gb=bc=gd=0$.

Izrādījās ka aproksimācija telpā ar centrālām diferencēm (DS-2) un laikā ar aizklāto diferencu shēmu ir nestabila žiratrona jaunajai versijai, jo atrisinājums samazinot laika soli kļuva oscilējošs kā laikā tā arī telpā (O.Dumbraja skaitliskie eksperimenti 2010. g.). Lai uzzinātu šo atrisinājumu atbilstību fizikai tika lietota taišņu metode, reducējot parciālos diferenciālvienādojumus laikā uz parasto diferenciālvienādojumu sistēmu un tos risinot ar Matlab solveriem, kur laika solis tiek izvēlēts automātiski pēc uzdotās precizitātes. Skaitliskie aprēķini parādīja, kas stacionārā atrisinājuma f svārstības telpā tiešām ir (28.att.), bet laikā tās nav (skat. pārējos rezultātus darbā [21]).



28.attēls (stacionārais atr. f)

Publicētie, pieņemtie un iesniegtie publicēšanai darbi un referātu tēzes

1. A.Gedroics. Numerical simulation some heat transfer equation with the periodical boundary conditions. Abstract of 8-th Latvian Mathematical conf. 9-10 April 2010 in Valmiera, 36. pp.
2. A.Buikis, H.Kalis, A.Gedroics. Mathematical modelling of 2D magnetohydrodynamics and temperature fields, induced by alternating current feeding on the bar type conductors in a cylinder. Magnetohydrodynamics –MHD, vol.46, (2010),Nr. 1., 41-57.
- 3.H.Kalis, A.Gedroics. Mathematical modelling of 2D magnetohydrodynamic flow between two coaxial cylinders in an external magnetic field. Magnetohydrodynamics –MHD, vol.46, 2010, Nr.2, 153-170.
4. H.Kalis. Spectral problem for second order finite difference operator with third kind boundary conditions. Abstract of 8-th Latvian Mathematical conf. 9-10 April 2010 in Valmiera, 36. pp.

5. H.Kalis, A.Buikis. Method of lines and finite difference schemes of exact spectrum for solution the hyperbolic heat conduction equation. Abstr. of 15-th intern. conf. on “Mathematical Modelling and Analysis”, MMA2010, May 26-29, 2010, Druskininkai, Lithuania ,1 pp..
6. A.Gedroics and H.Kalis. Spectral problem for second order finite difference operator. Abstr.of 16-th int. conf. on “Difference equations and applications”, ICDEA2010, July 19-23, 2010, Rīga, Latvia, 26. pp.
7. H.Kalis, A.Gedroics, I.Kangro .About of blow-up phenomena for nonlinear heat transfer problem between two infinite coaxial cylinders. Proc. of 6. int. scien. colloquim “Modelling for Material Processing”, sept. 16-17, 2010, 169-174.
8. A.Buikis, H.Kalis. Hyperbolic heat equation in bar and finite difference schemes of exact spectrum. Proc. of int. conf., Corfu, July, 2010,1-6.
9. A.Cebers, H.Kalis. Dynamics of superparamagnetic filament with finite magnetic relaxation time. “The European Physical Journal E “, 2011, 34:30, DOI 10.1140/epje/i2011-11030-y, 1-5.
10. M.Belovs, A.Cēbers, H.Kalis. Dynamics of flexible magnetic microrods. Abstr. of 16-th intern. conf. on “Mathematical Modelling and Analysis”, MMA2011, May 25-28, 2011, Sigulda, Latvija, 13.pp
11. A.Cēbers, H.Kalis. Intrinsic curve dynamics of magnetic filaments. Abstr. of 16-th intern. conf. on “Mathematical Modelling and Analysis”, MMA2011, May 25-28, 2011, Sigulda, Latvija, 25.pp
12. J. Cepītis, O.Dumbrajs, H.Kalis, A.Reinfelds and D.Constantinescu. Numerical experiments of single mode gyrotron equations. Abstr. of 16-th intern. conf. on “Mathematical Modelling and Analysis”, MMA2011, May 25-28, 2011, Sigulda, Latvija, 26.pp
13. A.Gedroics, H.Kalis. Higher order finite difference schemes for periodical boundary conditions. Abstr. of 16-th intern. conf. on “Mathematical Modelling and Analysis”, MMA2011, May 25-28, 2011, Sigulda, Latvija, 48.pp
14. I.Kangro, A. Gedroics and H.Kalis. About mathematical modelling of peat blocks in 3-layered 3D domain. Abstr. of 16-th intern. conf. on “Mathematical Modelling and Analysis”, MMA2011,May 25-28, 2011, Sigulda, Latvija, 67.pp
15. H.Kalis, S. Rogovs. Finite difference shemes with exact spectrum or solving

- differential equations with boundary conditions of the first kind. Int. Journ. of Pure and Applied Mathematics – IJPAM, vol. 71, Nr. 1, 2011, 159-172.
16. E.Teirumnieka, E. Teirumnieks, I.Kangro, H.Kalis, A.Gedroics.
The mathematical modeling of Ca and Fe distribution in peat layers.
Proc. of the 8-th int. scientific practical conference "Environment. Technology. Resources.", Rezekne higher education institution, June 20-22, vol. 2, 2011, 40-47.
17. H.Kalis and A.Buiķis. Method of lines and finite difference schemes of exact spectrum for solution the hyperbolic heat conduction equation. Mathematical Modelling and Analysis, vol.16, Nr.2, 2011, 220-232.
18. A.Cēbers, H.Kalis. Intrinsic curve dynamics of magnetic filaments. Magnetohydrodynamics –MHD, vol.47, 2011, Nr.3, 223-235 .
19. A. Cebers and H.Kalis. Mathematical modelling of an elongated magnetic droplet in a rotating magnetic field. Mathematical Modelling and Analysis, vol. 17, Nr. 1 , 2012, 47-57.
20. J.Cepitis, O.Dumbrajs, H.Kalis, A.Reinfelds, U. Strautins. Analysis of Equations Arising in Gyrotron Theory. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vilnius, IMI, 2012, vol.17,Nr.2, 139-152.
21. A.Reinfelds , O.Dumbrajs, H.Kalis, J.Cepitis, D.Constantinescu. Numerical experiments with single mode gyatron equations. Mathematical Modelling and Analysis, vol. 17, Nr 2. 2012, 251-270.
22. H.Kalis, M.Marinaki and A.Gedroics. Mathematical modelling of the 2D MHD flow around cylinders placed periodically. Acta Societatis Mathematicae Latviensis, Abstr. of the 9-th Latvian Mathematical Conference, March 30-31, 2012, Jelgava, Latvia, pp.37.
23. H.Kalis, S.Rogovs and A.Gedroics. On the mathematical modelling of the diffusion equation with piecewise constant coefficients in the multi-layered domain. Acta Societatis Mathematicae Latviensis, Abstr. of the 9-th Latvian Mathematical Conference, March 30-31, 2012, Jelgava, Latvia, pp.38.
24. I.Kangro, H.Kalis, Ē. Teirumnieka, E. Teirumnieks and A.Gedroics. On mathematical modelling of peats in multi-layered environment. Acta Societatis

- Mathematicae Latviensis, Abstr. Of the 9-th Latvian Mathematical Conference, March 30-31, 2012, Jelgava, Latvia, pp.39.
25. H.Kalis, S.Rogovs and A.Gedroics. Finite difference schemes with exact spectrum for solving some diffusion problems. Abstr. of MMA2012, June 6-9, 2012, Tallinn, Estonia, pp. 63.
26. A. Cebers and H.Kalis. Numerical simulation of magnetic droplet dynamics in a rotating field. Abstr. of MMA2012, June 6-9, 2012, Tallinn, Estonia, pp. 64.
27. H.Kalis, M.Marinaki and A.Gedroics. On simulation of viscous incompressible electrically conducting flow around periodically placed cylinders. Abstr. of MMA2012, June 6-9, 2012, Tallinn, Estonia, pp. 65.
28. H.Kalis, S.Rogovs and A.Gedroics. Method of lines and finite difference schemes with exact spectrum for solving some problems of mathematical physics. Abstr. of NAA'12: fifth conference on numerical analysis and applications, June 15-20, 2012, Lozenetz, University of Rouse, Bulgaria, pp.23.
29. A. Cebers and H.Kalis. Numerical simulation of magnetic droplet dynamics in a rotating field. Mathematical Modelling and Analysis, 2013 (iesniegts publicēšanai).
30. H.Kalis, M.Marinaki and A.Gedroics. Mathematical modelling of the 2D MHD flow around infinite cylinders with square section placed periodically. Magnetohydrodynamics –MHD, vol.48, 2012, Nr.3 , 243-258.
31. H.Kalis, S.Rogovs and A.Gedroics. Finite difference schemes with exact spectrum for solving some diffusion problems. Mathematical Modelling and Analysis, 2013 (iesniegts publicēšanai).
32. H.Kalis, M.Marinaki and A.Gedroics. On simulation of viscous incompressible electrically conducting flow around periodically placed cylinders. Mathematical Modelling and Analysis, 2013 (iesniegts publicēšanai).
33. H.Kalis, S.Rogovs, A. Gedroics. On the mathematical modelling of the diffusion equation with piecewise constant coefficients in the multi-layered domain. Int. journ. of Pure and Applied Mathematics – IJPAM, 2012, 19 lp.(pieņemts publicēšanai).
34. H. Kalis, A.Gedroics. The finite difference schemes with the exact spectrum for solution some problems of mathematical physics. Mācību līdzeklis maģistriem (tiks

pilnīgi noformēts 2013.g.)

Izmantotie interneta resursi:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Circulant_matrix
- <http://mathworld.wolfram.com/CirculantMatrix.html>
- <http://www-ee.stanford.edu/~gray/toeplitz.pdf>

Pētījuma apakšaktivitāte

4.4.3. Sarežģītu siltuma apmaiņas procesu matemātiskā analīze, modelēšana un optimizācija

Aktivitātes vadītājs: profesors Uldis Raitums

